III—10　　内部剪断源による弾性半空間表面の波動伝播

鉄道技術研究所　正員　生方俊夫

杭打ちによる地盤振動の問題は建設工事の増加にともなう振動障害の公害対策に関連して重要な課題となっている。そのためにこれらに関する調査或は研究が多くなってきたが，2，3の研究[1),2)]を除けばそのほとんどは振動的な考察に従ったものである。

しかしながら地盤の振動は機械或は構造物の振動のように単純に振動的に考察できない波動特性を有する。従って杭打時の地盤振動の問題を本質的に解明するためには振動の発生ならびに伝播機構を明らかにする必要があると考えられる。

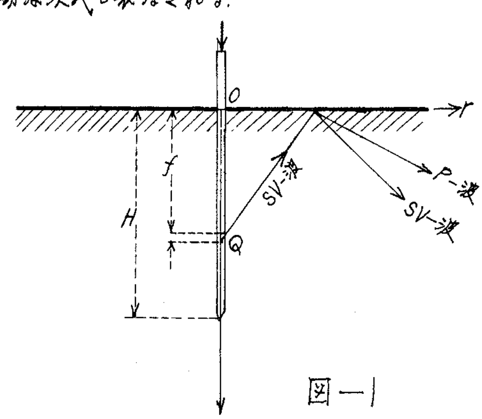
よってここではその研究の端緒として杭打ちによる振動の発生機構はつとめて簡略にして専らその伝播機構に着目することによってこの問題の理論的な考察を行った。ただしここでは問題の単なる形式的な解をしめしたに過ぎないがかかる問題の究明の手がかりの一助ともなれば幸いである。

問題の数式表現とその形式解

地中に打込まれた杭によって発生する地盤の振動は周辺地盤に対する杭尖端部分による圧縮作用と杭側面の剪断ならびに杭の屈曲による圧縮作用によるものと考えられる。実際にはこれらの作用が同時に行われることによって地盤に振動を誘起するものであるが，ここでは簡単のため杭側面の剪断作用に起因する振動だけに着目して考察することにした。なお杭尖端の圧縮作用による波動伝播の問題は類似的に Pekeris[3)] によって既に究明されている。

今図—1にしめすように打込み深さ H の杭が地盤に打込まれたものと考える。地盤を均質等方性の弾性半空間と仮定し、その表面上に原点をおき、Z軸の正方向を半空間内部にとった座標軸を選べば杭の任意の要素部分Qの剪断性攪乱による半空間の運動は次式で表わされる。

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\sigma}}{\partial t^2}-\delta(\boldsymbol{\varpi})f(t)=(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})-\mu\times\nabla\times\nabla\boldsymbol{\sigma} \quad \text{--------(1)}$$



図—1

ここに $\boldsymbol{\sigma}$ は変位ヴェクトル，λ, μ は Laméの常数 ρ は媒質密度，$\boldsymbol{\varpi}$ は位置に関するヴェクトル，$\delta(\text{---})$ は Dirac のデルタ函数である．また $f(t)$ は攪乱源函数で初期衝撃性のものである．

ここにおいて今 ϕ をスカラーポテンシャル，ψ をヴェクトルポテンシャルとして

$$\boldsymbol{\sigma}=\nabla\phi+\nabla\times\psi\;,\qquad \nabla\cdot\psi=0 \quad \text{--------(2)},$$

なる関係を(1)式に代入すれば ϕ 及び ψ が次のスカラー波動方程式及びヴェクトル波動方程式を満足することがわかる。

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad , \quad \nabla^2\psi = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \delta(r)\delta(z-f)f(t) \quad \text{------ (3), (4)}$$

$$\text{但し} \quad \alpha^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \;, \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{----- (5), (6)}$$

問題は z 軸に関して対称であるから $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ なることを考慮すれば(2)式に従って変位及び応力の成分はポテンシャル函数を使って次のように表はされる。即ち r 軸方向の変位 q 及び z 軸方向の変位 w に対して、

$$q = \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z} \quad , \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \quad \text{------ (7), (8)}$$

また応力成分に対しては、

$$p_{zz} = \lambda\nabla^2\phi + 2\mu\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right\} \;, \quad p_{zr} = \mu\left\{2\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right\} \quad \text{---- (9), (10)}$$

である。境界における条件は半空間表面で応力自由であることより

$$z = 0 \quad : \quad p_{zz} = 0 \;, \quad p_{zr} = 0 \quad \text{------- (11), (12)}$$

これらの条件のもとで波動方程式を満足する表面変位を求めるために次の Laplace 変換を定義する。

$$\bar{F}(r, z, s) = \int_0^\infty e^{-st} F(r, z, t)\, dt \quad \text{-------- (13)}$$

よって波動方程式(3), (4)式を変換すれば、

$$\nabla^2\bar{\phi} = \frac{s^2}{\alpha^2}\bar{\phi} \qquad \nabla^2\bar{\psi} = \frac{s^2}{\beta^2}\bar{\psi} - \delta(r)\delta(z-f)\bar{f}(s) \quad \text{------ (14), (15)}$$

となる。ここにおいて(15)式を満足する解を ψ_0 とすれば次の Hankel 変換対 即ち

$$\tilde{\bar{F}}(\xi, z, s) = \int_0^\infty r\bar{F}(r, z, s) J_0(\xi r)\, dr \;:\; \bar{F}(r, z, s) = \int_0^\infty \xi\tilde{\bar{F}}(\xi, z, s) J_0(\xi r)\, d\xi$$

によって次のようになる。

$$\psi_0 = \frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\xi}{\eta_\beta} e^{-\eta_\beta|z-f|} J_0(\xi r)\, d\xi \quad \text{------ (16)}$$

今境界条件(11), (12)式を満足する波動方程式(14), (15)式の解として

$$\bar{\phi} = \int_0^\infty A(\xi) e^{-\eta_\alpha z} J_0(\xi r)\xi\, d\xi \qquad \bar{\psi} = \psi_0 + \int_0^\infty B(\xi) e^{-\eta_\beta z} J_0(\xi r)\xi\, d\xi \quad \text{------- (17), (18)}$$

$$\text{但し} \quad \eta_\alpha^2 = \xi^2 + \frac{s^2}{\alpha^2} \quad , \quad \eta_\beta^2 = \xi^2 + \frac{s^2}{\beta^2} \quad \text{------ (19), (20)}$$

と表はすことにする。ここに(17), (18)の積分項は境界の存在による擾動ポテンシャルである。

所で Laplace 変換形式における境界条件は (11), (12) 式より

$$\left[\lambda\nabla^2\bar{\phi}+2\mu\left\{\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial r}\right)\right\}\right]_{z=0}=0\quad,\quad\left[2\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial r\partial z}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial r}\right)\right]_{z=0}=0\quad\text{---(21), (22)}$$

であるからこれらに上記 (17), (18) 式を代入すれば

$$A\left(\frac{\lambda}{2\mu}\frac{s^2}{\alpha^2}+\eta_\alpha^2\right)-\eta_\beta\xi^2B=-\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}e^{-\eta_\beta f}\xi^2\quad,\quad 2A\eta_\alpha-(\eta_\beta^2+\xi^2)B=\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}e^{-\eta_\beta f}\left(\eta_\beta+\frac{\xi^2}{\eta_\beta}\right)\quad\text{------ (23), (24)}$$

となる。しかるに

$$\frac{\lambda}{2\mu}\frac{s^2}{\alpha^2}+\eta_\alpha^2=\frac{1}{2\beta^2}(s^2+2\beta^2\xi^2)\,,\qquad \eta^2+\xi^2=\frac{1}{\beta^2}(s^2+2\beta^2\xi^2)$$

であるから (23), (24) 式は書改められて

$$A(s^2+2\beta^2\xi^2)-2\eta_\beta\xi^2\beta^2B=-\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}e^{-\eta_\beta f}\cdot 2\beta^2\xi^2\,,\quad 2A\eta_\alpha\beta^2-(s^2+2\beta^2\xi^2)B=\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}e^{-\eta_\beta f}\frac{1}{\eta_\beta}(s^2+2\beta^2\xi^2)\quad\text{--- (25), (26)}$$

となる。これより A, B が次のように決定される。

$$A(\xi)=-\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\frac{4\beta^2\xi^2(s^2+2\beta^2\xi^2)e^{-\eta_\beta f}}{R(\xi^2)}\qquad B(\xi)=-\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\frac{e^{-\eta_\beta f}}{\eta_\beta}-\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\frac{8\eta_\alpha\xi^2\beta^4e^{-\eta_\beta f}}{R(\xi)}\quad\text{---- (27), (28)}$$

ここに $R(\xi^2)$ は Rayleigh 項で次を表はす。

$$R(\xi^2)=(s^2+2\beta^2\xi^2)^2-4\eta_\alpha\eta_\beta\xi^2\beta^4\qquad\text{---------- (29)}$$

よってこれらの $A(\xi)$, $B(\xi)$ を (17), (18) 式に代入すれば、所要の変換ポテンシャルが得られる。

$$\bar{\phi}=-\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\int_0^\infty\frac{4\beta^2\xi^2(s^2+2\beta^2\xi^2)e^{-\eta_\beta f-\eta_\alpha z}}{R(\xi^2)}J_0(\xi r)\xi d\xi\quad\text{---- (30)},$$

$$\bar{\psi}=\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\int_0^\infty\frac{R(\xi^2)e^{-\eta_\beta(f-z)}-\{R(\xi^2)+8\eta_\alpha\eta_\beta\xi^2\beta^4\}e^{-\eta_\beta(f+z)}}{R(\xi^2)\eta_\beta}J_0(\xi r)\xi d\xi\quad\text{--- (31)}$$

次にこれらのポテンシャル函数を (7), (8) 式の変位成分の Laplace 変換形式、即ち

$$\bar{q}=\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r}+\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial r\partial z}\,,\qquad \bar{w}=\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z}-\left(\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial r}\right)\qquad\text{----- (32), (33)}$$

に代入すれば

$$\bar{q}(r,z,s)=\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\int_0^\infty\frac{4\beta^2\xi^2(s^2+2\beta^2\xi^2)e^{-\eta_\beta f-\eta_\alpha z}}{R(\xi^2)}J_1(\xi r)\xi^2d\xi-\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\int_0^\infty\frac{R(\xi^2)e^{-\eta_\beta(f-z)}+\{R(\xi^2)+8\eta_\alpha\eta_\beta\xi^2\beta^4\}e^{-\eta_\beta(f+z)}}{R(\xi^2)}J_1(\xi r)\xi^2d\xi\quad\text{--- (34}$$

$$\bar{w}(r,z,s)=\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\int_0^\infty\frac{4\beta^2\xi^2(s^2+2\beta^2\xi^2)\eta_\beta e^{-\eta_\beta f-\eta_\alpha z}}{R(\xi^2)}J_0(\xi r)\xi d\xi+\frac{\bar{f}(s)}{4\pi}\int_0^\infty\frac{R(\xi^2)e^{-\eta_\beta(f-z)}-\{R(\xi^2)+8\eta_\alpha\eta_\beta\xi^2\beta^4\}e^{-\eta_\beta(f+z)}}{R(\xi^2)\eta_\beta}J_0(\xi r)\xi^3d\xi\quad\text{-- (3}$$

ここに求められた結果は任意の深さにおける点状源による半空間の変換変位成分である。従つ

て長さHの線状源による変位成分は上式をHにわたって積分すればよい。即ち

$$\bar{q}_H(r,z,s)=\frac{\bar{f}(s)}{4\pi H}\int_0^H d\zeta\int_0^\infty\frac{4\beta^2\xi^2(s^2+2\beta^2\xi^2)e^{-\eta_\beta\zeta-\eta_\alpha z}}{R(\xi^2)}J_1(\xi r)\xi^2 d\xi$$

$$-\frac{\bar{f}(s)}{4\pi H}\int_0^H d\zeta\int_0^\infty\frac{R(\xi^2)e^{-\eta_\beta(\zeta-z)}+\{R(\xi^2)+8\eta_\alpha\eta_\beta\xi^2\beta^4\}e^{-\eta_\beta(\zeta+z)}}{R(\xi^2)}J_1(\xi r)\xi^2 d\xi$$

$$=\frac{\bar{f}(s)}{4\pi H}\int_0^\infty\frac{(1-e^{-\eta_\beta H})}{R(\xi^2)\eta_\beta}\left[4\beta^2\xi^2(s^2+2\beta^2\xi^2)e^{-\eta_\alpha z}-R(\xi^2)e^{\eta_\beta z}-\{R(\xi^2)+8\eta_\alpha\eta_\beta\xi^2\beta^4\}e^{-\eta_\beta z}\right]J_1(\xi r)\xi^2 d\xi \quad ---(36)$$

$$\bar{w}_H(r,z,s)=\frac{\bar{f}(s)}{4\pi H}\int_0^H d\zeta\int_0^\infty\frac{4\beta^2\xi^2(s^2+2\beta^2\xi^2)\eta_\beta e^{-\eta_\beta\zeta-\eta_\alpha z}}{R(\xi^2)}J_0(\xi r)\xi d\xi$$

$$+\frac{\bar{f}(s)}{4\pi H}\int_0^H d\zeta\int_0^\infty\frac{R(\xi^2)e^{-\eta_\beta(\zeta-z)}-\{R(\xi^2)+8\eta_\alpha\eta_\beta\xi^2\beta^4\}e^{-\eta_\beta(\zeta+z)}}{R(\xi^2)\eta_\beta}J_0(\xi r)\xi^3 d\xi$$

$$=\frac{\bar{f}(s)}{4\pi H}\int_0^\infty\frac{(1-e^{-\eta_\beta H})}{R(\xi^2)}\left[4\beta^2\xi^2(s^2+2\beta^2\xi^2)e^{-\eta_\alpha z}\right]J_0(\xi r)\xi d\xi+\frac{\bar{f}(s)}{4\pi H}\int_0^\infty\frac{(1-e^{-\eta_\beta H})}{R(\xi^2)\eta_\beta^2}\left[R(\xi^2)e^{\eta_\beta z}-\{R(\xi^2)+8\eta_\alpha\eta_\beta\xi^2\beta^4\}e^{-\eta_\beta z}\right]\xi^3 J_0(\xi r)d\xi \quad ---(37)$$

故に(13)式に対応するLaplace反転積分を上式に施し、$z=0$とおけば所要の半空間表面の変位成分が得られる。即ち

$$q_H(r,0,t)=\frac{-1}{4\pi^2 Hi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\bar{f}(s)e^{st}ds\int_0^\infty\frac{(1-e^{-\eta_\beta H})}{R(\xi^2)\eta_\beta}\left[s^2(s^2+2\beta^2\xi^2)\right]J_1(\xi r)\xi^2 d\xi \quad -----(38)$$

$$\bar{w}_H(r,0,t)=\frac{1}{2\pi^2 Hi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\bar{f}(s)e^{st}ds\int_0^\infty\frac{(1-e^{-\eta_\beta H})}{R(\xi^2)\eta_\beta}\left[\eta_\beta(s^2+2\beta^2\xi^2)-2\eta_\alpha\xi^2\beta^2\right]\beta^2 J_0(\xi r)\xi^3 d\xi \quad ----(39)$$

但し $R(\xi^2)=(s^2+2\beta^2\xi^2)^2-4\eta_\alpha\eta_\beta\xi^2\beta^4$

(38), (39)式の被積分項は特異点を有し、それからの積分への寄与が重要な波動特性の意味をもっている。積分の評価は困難であるがその評価の方法は、Lamb, Sommerfeld, 或はCagniard等の数理物理学者によって開発されている。

(引 用 文 献)

1). 小林芳正 ：“くい打ちによる地盤の振動と変状” 鉄道技術研究資料、Vol. 24, No. 7. (昭42-7).

2). 川本 整 ：“杭打ちによる地盤の振動について” 大阪工業大学紀要, 理工篇, 第5巻, 第2, 3号, 1960.

3). Pekeris, C. L. : “The Seismic Surface Pulse.” Proceedings of National Academy of Science, Vol. 41, 7, 1955. PP. 469-480.