

1. 概説

地震動を受ける地盤の応答現象を解析しようとする場合、地震波をそのままの姿でとらえる波動論的解析が有効であると考えられる。そしてこの種の解析においては一般に媒質の物理的条件から波動方程式が誘導され、この波動方程式の解法の一つとして特性曲線法が用いられる。この研究では、地盤内応力波の伝播挙動を解析するために最も基本となる一次元の波動伝播を考へ、特性曲線法によりその解析を行なつて実験で得られた結果と比較した。

2. 衝撃波の伝播の解析

半無限の非弾性物質をとり、その表面に加えられる衝撃波の伝播を考へる。ここでは図-1に示すような直線形応力-ひずみ曲線をもつ媒質を仮定している。これは低応力のもとでは載荷・除荷に対して応力-ひずみ関係はこう配 E_1 の直線 OA のように線形であり、物質は弾性体として挙動する。次にこの物質に弾性限界以上の応力が作用すると、載荷に対してはこう配 E_2 の直線 AC で表わされ、 B 点で除荷されると直線 BD に沿つて進む。この除荷部分のこう配は初期弾性係数 E_1 に等しい。

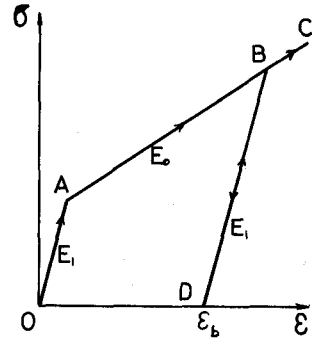


Fig. 1

このような応力-ひずみ曲線をもつ媒質内の平面圧縮波の一次元伝播に対して、図-2に示すような微小要素 dx について運動方程式を立てると次式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

ここに ρ は媒質の密度、 σ は圧力、 $u(x, t)$ は時刻 t における粒子のその初期位置 x からの変位、 $\dot{u}$ は粒子速度である。

媒質内の圧縮ひずみ ϵ は、近似的に u の時間的变化を無視すると次式で与えられる。

$$\epsilon = -\frac{du}{dx} \approx -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

また応力-ひずみ曲線 BD 上の除荷部分に対して次の関係式がなり立つ。

$$\sigma = E_1(\epsilon - \epsilon_b), \quad \frac{1}{E_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (3)$$

式(1), (2), (3)より $E_1/\rho = c^2$ (c : 波動伝播速度)として次の一次元波動方程式が求められる。

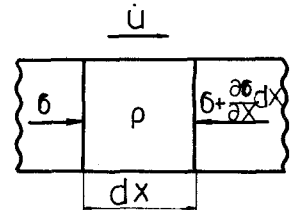


Fig. 2

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} \quad (4)$$

したがって wave front 背後の領域では、式(4)の一般解として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= f(x-ct) + g(x+ct) \\ \dot{u} &= \frac{c}{E_1} \{ f(x-ct) - g(x+ct) \} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに f と g は任意関数である。

次に図-3 の $x \sim t$ 平面において wave front 背後の任意点 $A(x, t)$ の応力および粒子速度を考える。front 上の2点 1 (x_1, t_1), 2 (x_2, t_2) における応力と粒子速度をそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2$ とする。式(5)より $g(x+ct)$ を消去すれば点2において

$$f(x_2-ct_2) = \frac{1}{2} \sigma_2 + \frac{E_1}{2c} \dot{u}_2$$

となる。しかるに C_+ 特性線に沿って $x-ct$ は一定であるから、この線上の各点に対して

$$f(x-ct) = \frac{1}{2} \sigma_2 + \frac{E_1}{2c} \dot{u}_2 \quad (6)$$

点1についても同様に考えると、 C_- 特性線上の点に対して

$$g(x+ct) = \frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{E_1}{2c} \dot{u}_1 \quad (7)$$

したがって点2を通る C_+ 特性線と点1を通る C_- 特性線の交点である $A(x, t)$ の応力 σ と粒子速度 $\dot{u}$ は、式(6), (7)を式(5)に代入することにより次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{E_1}{2c} (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \\ \dot{u} &= \frac{1}{2} (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) - \frac{c}{2E_1} (\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

これよりも wave front での応力と粒子速度がわかれば、領域内のすべての点の応力と粒子速度はこの式(8)で決定されることになる。

次に wave front での応力と粒子速度を考えることにしよう。図-4 の $x \sim t$ 平面において媒質の表面 ($x=0$) 上にある点 A, B に対して式(8)を適用すると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{E_1}{2c} (\dot{u}_1 - \dot{u}_2), & \dot{u}_A &= \frac{1}{2} (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) - \frac{c}{2E_1} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ \sigma_B &= \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) - \frac{E_1}{2c} (\dot{u}_2 - \dot{u}_3), & \dot{u}_B &= \frac{1}{2} (\dot{u}_2 + \dot{u}_3) - \frac{c}{2E_1} (\sigma_2 - \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

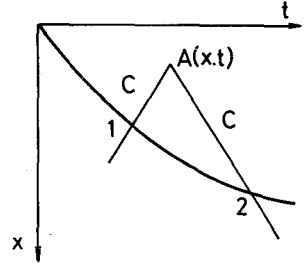


Fig. 3

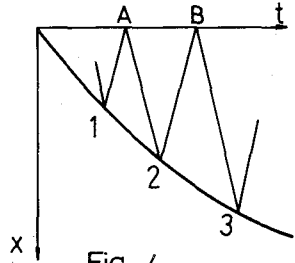


Fig. 4

ここに $\sigma_A, \sigma_B, \dot{u}_A, \dot{u}_B$ はそれぞれ点 A, B における応力と粒子速度を表す。

式(9)より $\sigma_1, \sigma_3, \dot{u}_1, \dot{u}_3$ を消去すると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B) + \frac{E_1}{2C}(\dot{u}_A - \dot{u}_B) \\ \dot{u}_2 &= \frac{1}{2}(\dot{u}_A + \dot{u}_B) + \frac{C}{2E_1}(\sigma_A - \sigma_B) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

したがって媒質表面での応力と粒子速度の時間的な分布がわかっているれば、wave front での応力と粒子速度は式(10)より決定される。

3. 実験結果との比較

応力波は概実験で円柱粘土保試本の表面に作用する応力波形は図-5のように近似的に $p(0, t) = p_0 e^{-\alpha t}$ で与えられた。すなわち载荷の瞬間に p_0 に達し、その後は時間とともに指数的に減少する。しかし粒子速度に関しては実験での測定が困難なため、次のような近似計算により shock front の応力を求めた。

front での応力と粒子速度をそれぞれ $\sigma_s, \dot{u}_s$ とすれば、 σ_s と $\dot{u}_s$ の関係は次式により与えられる。

$$\dot{u}_s = \frac{\sigma_s}{\rho c_0} \quad (11)$$

ここに c_0 は shock front の伝播速度である。

式(11)の関係を shock front の点 1, 2, 3 に対して成立するから式(9)より次の関係が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{E_1}{2C}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{C}{2E_1}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \sigma_B &= \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) - \frac{C}{2E_1}(\sigma_2 - \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

第1式より σ_2 を求めると、 $k = C/C_0$ として

$$\sigma_2 = \{2\sigma_A + (k-1)\sigma_1\} / (k+1) \quad (13)$$

式(13)より shock front 上の応力を次のように決定することができる。すなわち front の伝播速度 c_0 を一定と考えると、 $x \sim t$ 平面上の shock front は図-6のように直線となる。この図において表面近くの応力を $\sigma_1 = p_0$ と仮定すると、表面の応力分布は $p = p_0 e^{-\alpha t}$ で与えられているから式(13)より σ_2 が求まる。次に点 1, B, 2 に対して式(13)を適用すると σ_3 が決定され、以下同様に shock front 上の応力 $\sigma_4, \dots$ が逐次決定できる。この場合 front の応力は各点におけるピーク応力を

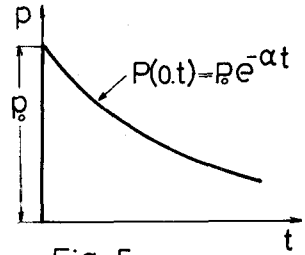


Fig. 5

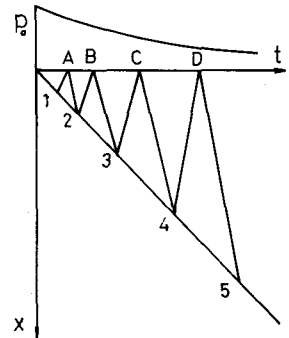


Fig. 6

表わすことになり、点1, 2, 3, ...-での σ と x の関係はピーク応力の減衰を表わしている。

図-7は実験より得られたピーク応力の減衰と、 $c/c_0 = 2, 3, 4$ の場合の計算値を比較したものである。ただし $c_0 = 50 \text{ m/sec}$ としている。

図より c/c_0 が大きくなると減衰は大きくなり、とくに距離が増すほどその傾向が強くなることがわかる。また x が大

きくなるにつれて実験値が計算値より小さくなる傾向がみられるが、これは shock front の伝播速度を一定と考えているためであり、実際には距離とともに変化しているからである。なお $c/c_0 = 1$ の場合は応力-ひずみ関係は原点を通る直線となり、この場合は弾性体内の応力波伝播を表わす。

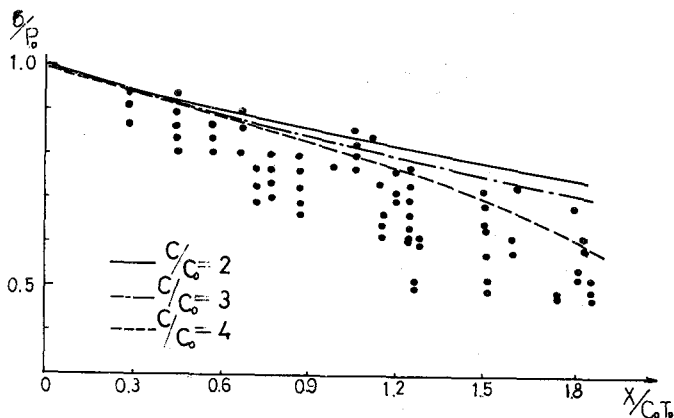


Fig. 7

4. あとがき

ここに述べた解析は媒質の側方を拘束しない場合、すなわち軟化材料についての応力波伝播に対するものであり、実験においてもそのような場合を扱った。しかし実際の地盤においては側方変位はなく、応力-ひずみ曲線が下に凸な曲線となる。そこで地盤内の応力波伝播を考える場合は、このような応力-ひずみ関係を示す非線形モデルを考えるなければならない。しかしこの場合でも上述の特長曲線の性質を利用すれば、同様に解析により地盤内の応力波伝播を明らかにすることができる。