Ⅱ－159　水系水質の変化とその予報に関する研究（Ⅱ）

— 確率過程としてみた水質変化の解析 —

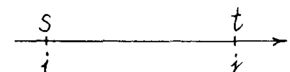
京都大学工学部　正員　合田　健
京都大学工学部　学生員　○西沢　稔

Ⅰ.

水系の水質変化を算定する問題は，いろいろな方法論が考えられるが（Ⅰ）で述べた決定論的方法の成果は，確率論的方法による結果と比較してみる必要があると考えられる。それは水質の変化過程が必らずしも完全に決定論的にとらえ得ないと考えるからである。確率論的方法では，ある水質状態がどの程度の頻度で生じるか，つまり水質状態の生起確率を論ずることが中心である。この種の方法は既にRichard P. Thayer and Richard G. Krutchkoff (Proc. ASCE. SA. 1967) が取り扱ったが，ここではもう少し一般的にかつ推移確率として扱ってみたい。

Ⅱ.

水質因子の評価値，たとえばBODをある単位量δで除することにより，それを段階的なものとして表現することができる。たとえばBODを指標に選んだとして，それが155 ppmであった場合，単位量が10 ppmであれば汚濁段階は155/10 = 15.5 つまり16段階である。今，図－1に示すように流下時間Sの断面での汚濁段階がiであったのが流下時間$t\ (t > S)$でjに変ったとする。この場合$t = S$で状態iから$t = t$で状態jに変る確率，つまりその推移確率を$P_{ij}(S,t)$とする。又Sでiである絶対確率をP_i，tでのそれをP_jとすると



(S < t)

図－1

$$P_j=\sum_i P_i\cdot P_{ij}(S,t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

となる。つまり(1)のように考えることにより水質変化を，水量で確率洪水なる概念があると同様に確率水質なる概念が水質面で考えることができるであろう。

Ⅲ. P_iについて

P_iはSで汚濁段階iが生じる絶対確率である。iが生じる原因は外部から汚濁付加がありその結果iになったと考えてもよいし，河川のある点が単にiであると考えることもできる。前者の汚濁付加によりiになる場合は河川外環境，主として都市，産業活動によるものと考えられる。P_iがあって(1)式に従ってP_jが生じると考えてもよいし，P_iはP_jを定めることにより(1)式に従って定められるものと考えてもよい。

Ⅳ. $P_{ij}(S,t)$について

$P_{ij}(S,t)$は，iをjに変える確率，つまり移送や生物的変化などの要因をすべて含んだ自浄作用を示すものである。この$P_{ij}(S,t)$は，水質データそのものより決定することも考えられるがここでは別の方法を用いてみる。既に述べたように河川水質を段階になおし離散数として取り扱っているので，ここに次のような確率過程が適用できると考える。Kolmogorovの前向きの方程式；

$$\partial P_{ij}(S,t)/\partial t=-q_j(t)\cdot P_{ij}(S,t)+\sum_k q_{kj}(t)\cdot P_{ik}(S,t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ここに，S，t……時刻$(t>S)$，q_{kj}……iからjへの推移強度関数，$P_{ij}(S,t)$……Sでiをとる条件のもとでtでjをとる確率，ただしS＝tの時$P_{ij}(t,t)=\delta_{ij}$，時刻tで状態がiから他の値に変

化したとき変化後の値がjである確率を$\pi_{ij}(t)$とすると，$q_{ij}(t)=q_i(t)\cdot\pi_{ij}(t)$，ただし$q_i(t)$は推移強度関数。(2)の式をそのまま用いると一般性が保たれてよいが，扱いに困難なため，一つの考えかたとして時刻tでおこる変化のありかたが1単位増加するか1単位減少するかのいずれかであるような過程ーこれは出生死亡過程として知られているーを用いる。

出生死亡過程の性質から

$$\pi_{ij}(t)=0\quad(j=\pm 1),\quad \pi_{i,i-1}(t)+\pi_{i,i+1}(t)=1,\quad q_{i,i+1}(t)=q_i(t)\pi_{i,i+1}(t)=\lambda_i(t)\quad(i\geqq 0)$$

$$q_{i,i-1}(t)=q_i(t)\pi_{i,i-1}(t)=\mu_i(t)\quad(i\geqq 1)$$，以上より$q_i(t)=\lambda_i(t)+\mu_i(t)$

以上をKolmogorovの前向きの方程式に用いると

$$\partial P_{ij}(s,t)/\partial t=-[\lambda_j(t)+\mu_j(t)]P_{ij}(s,t)+\lambda_{j-1}(t)+\mu_{j+1}(t)P_{i,j+1}(s,t)\quad(j\geqq 1)$$

$$\partial P_{i0}(s,t)/\partial t=-\lambda_0(t)P_{i0}(s,t)+\mu_i(t)P_{i,1}(s,t),\quad P_{ij}(s,s)=\delta_{ij}$$

となる。この方程式を一般的に$\lambda_j(t)$, $\mu_j(t)$で解くのは困難なので次のように仮定する。

つまり，$\lambda_n=0$，$\mu_n=n\cdot\mu(t)$とおくと

$$P_{ij}(s,t)=\frac{i!}{j!(i-j)!}\left\{1-e^{\tau(s)-\tau(t)}\right\}^{i-j}\cdot e^{j\{\tau(s)-\tau(t)\}},\ ここに\ \tau(t)=\int_0^t\mu(t)dt\ \cdots\cdots(3)$$

iを固定して考えると，jの平均値$\bar{j}$と分散σ^2は

$$\bar{j}=ie^{\{\tau(s)-\tau(t)\}}\ \cdots\cdots(4)$$

$$\sigma^2=ie^{\{\tau(s)-\tau(t)\}}\cdot(1-e^{\{\tau(s)-\tau(t)\}})\ \cdots\cdots(5)$$

水質因子を変化させる諸要因のうち，生物反応による減少をあらわす，一次反応型の減少だけを要因としてとりだしてみるとdt時間に濃度CがdC減少するとすれば，$dC=kCdt$，ゆえに汚濁段階がdt時間に1単位減少する確率は$dC/\delta=kCdt/\delta$，汚濁濃度Cの時の汚濁段階をnとすると$n=C/\delta$．

つまり$dC/\delta=kndt$。$\therefore kndt=\mu(t)ndt$，$\therefore \mu(t)=k$　これを(4)に代入すると

$$\bar{j}=ie^{\{\int_0^s kdt-\int_0^t kdt\}},\quad k=const,\quad t-s=T\ とすると\ \bar{j}=ie^{-kT}\ \cdots\cdots(6)$$

式(6)は段階として表現しているので両辺にδを乗じて，$L=L_0e^{-kT}$（ただし$L=\delta\cdot\bar{j}$，$L_0=i\cdot\delta$）

これは既にThayer and Krutshkoffによって示されているように，Streeter-Phelpsの式はこの場合の平均に等しいことがわかる。同様に，$\sigma^2=i\cdot e^{-kT}(1-e^{-kT})$　つまり$\mu(t)=k$とした場合がThayer and Krutshkoffの求めた式に一致することがわかる。

V.

以上P_{ij}を求めたが，ここでIVの扱いでは推移強度関数を考えるさい要因として考えた項が一次反応型をとる減少項のみであったことに注意せねばならない。実際は拡散，移送，沈殿その他の現象を含むので，この点を考慮した推移強度関数の表現について検討をしている。なお(2)式がそのまま取り扱いにくいために出生死亡過程を用いたが，この点についても別な角度から議論の必要があろう。こういう考え方をしたことの妥当性をみるために実測値による検討を進めているが講演のさい触れたい。