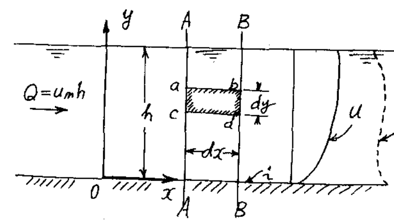
II－158

水質の変化とその予報に関する研究(1)
－拡散係数が変化する場合の解析－

京都大学工学部　正員　○合田　健
〃　　学生員　西沢　稔

はじめに　都市河川や下水道のような水系で，人為的に加えられる汚濁の因子と，水系自身の水文水理・水質因子により，ある汚濁相が現出する。そうした因子群の時間的変化に応じ汚濁相も変化するが，人口増加や汚濁負荷変動にもとづく将来水質は重大な関心事である。それには，Streeter 型の式や1次元の拡散方程式のような簡単な力学モデルを用いることも行なわれているが，実際にはより綿密な検討が必要であろう。本研究は，力学モデルが現象変化をどの位精密に予測しうるかを知る研究の初として，(1)では従来からの決定論的立場をとり，物質輸送に関する基礎式から出発し，一般性を失なわないような演算で，扱いやすい断面平均水質のような量に関する式に変換する方法を追究した。一方(2)では，立場を変え現象変化を確率過程としてみた場合，どのような差異があり，どこまで応用が可能かを検討することにした。



基礎式と想定条件　簡単のため幹線水路を直線とし，2次元の物質輸送を考え，せん断乱流中で，輸送される物質は溶解性とし，力学的には水分子の運動にほぼ完全にフオローすると考える。図のように主流・鉛直方向に座標軸をとり，y方向の流速分布は対数法則が適用されるとすると，局所的な溶解性物質の濃度変化率は次式が基礎となる。

$$\partial c/\partial t + \partial/\partial x\,(uc) = \partial/\partial x\,(e_x\,\partial c/\partial x) + \partial/\partial y\,(e_y\,\partial c/\partial y) - f_1 + f_2 - P \qquad \cdots\cdots(1)$$

ただし，cは濃度，uはx方向の流速，e_x, e_yはそれぞれx, y方向の拡散係数で一般にはx, y, tの関数，f_1は生物学的又は化学的作用による濃度減少率，f_2は流路途中での物質の流入，Pは光合成作用の影響をあらわす。(1)式は，差分式の形で計算することもできようが，利用上局所変化を断面平均値に関する表現に直した方がよい。濃度変化の関係因子として 1) 移送，2) 拡散，3) 生物学的変化，4) 流路での添加，5) 光合成，6) 時間的変化，の各項が含まれている。対象が沈降性物質であればさらに沈殿堆積の項も付加せねばならぬが，ここでは含まない。

各項のA～B区間における積算と断面平均値の導入

1) 移送項について，流速分布は $u(y) = u_h - (u_*/\kappa)\ln(y/h)$, $u_* = (gih)^{1/2}$ で與えられ，uの断面平均u_m，cの平均をc_mとする。$u - u_m = u'$, $c - c_m = c'$ とおいて，移送によるA～B間での単位時間当り濃度増加 dA_d を求めるとつぎのようになる。

$$dA_d = \int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(uc)\,dy\cdot dx = -Q\,dx\,\frac{\partial}{\partial x}[c_m(1+\alpha)], \qquad \alpha = (1/h)\int_0^h \frac{u'c'}{u_m c_m}\,dy \qquad \cdots(2)$$

濃度の鉛直分布により特性づけられるc'とu'との相関が問題であるが，河川での実測例によくあるように濃度がy方向にほぼ一様であれば$\alpha = 0$であり，また，一般に主流方向の濃度変化が緩慢であれば，$dA_d = -(1+\alpha)Q\,dx\cdot\partial c_m/\partial x$ としてもよい。

2) 拡散項について，x方向とy方向とを別に求める。

2.1) $\partial/\partial x\,(e_x\,\partial c/\partial x)$ のA～B間での累加は，1)と同様に $e_x - e_{xm} = e_x'$, $c - c_m = c'$ を用いる

と，$(\partial c/\partial x)_m \cong \partial c_m/\partial x$ の近似によりつぎのようになる。

$$dD_x = h\,dx\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_1 e_{xm}\frac{\partial c_m}{\partial x}\right),\quad \beta_1 = 1+\beta,\qquad \beta = (1/h)\int_0^h\left(e_x'\frac{\partial c'}{\partial x}\Big/ e_{xm}\frac{\partial c_m}{\partial x}\right)dy \qquad \cdots\cdots(3)_1$$

β は，e_x と $\partial c/\partial x$ が y のみの関数とみなせる場合はやや簡単になる。濃度の鉛直分布が一様であれば，ここでも $\beta=0,\ \beta_1=1$ となることに注意を要する。なおもし乱流の運動量交換係数 $\epsilon = \tau/\rho/(du/dy)$ を e_x として用いるなら，$e_x = u_*\kappa y(1-y/h)$，$e_{xm} = 0.067\,u_*h$ であり，次のようになる。

$$dD_x = 0.067\,u_*h^2 dx\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_1\frac{\partial c_m}{\partial x}\right) \qquad \cdots\cdots(3)_1$$

2.2) $\partial/\partial y(e_y\,\partial c/\partial y)$ の A～B 間での累加：計算すると

$$dD_y = \int_0^h\frac{\partial}{\partial y}\left(e_y\frac{\partial c}{\partial y}\right)dy\cdot dx = \left[e_y\frac{\partial c}{\partial y}\right]_0^h dx \qquad \cdots\cdots(3)_2$$

$y=h$ は水面，$y=0$ は底面又は他相との境界で，結局 $e_y\frac{\partial c}{\partial y}\big|_{y=0}$ のみが問題であり，この値が0でなく，ある一定率 γ であるとすれば，$dD_y = \gamma\cdot dx$ となる。またもし，$e_y = e_x = \epsilon$ であれば，$\epsilon_{y=0} = 0$ により $dD_y = 0$ となる。

3) 生物学的作用の項について

問題としている物質が，好気性微生物の代謝作用により1次反応型の減少を示す場合は，素片 abcd 内では $-kc\,dy\,dx$ が単位時間の濃度減少率である。よって A～B 間では

$$dB = -\int_0^h kc\,dy\cdot dx = -kh\,c_m\cdot dx \qquad \cdots\cdots(4)$$

4) 流路での添加

厳格には，流路にそう汚濁量の増加には支川や下水支渠などの流入以外に，底質の嫌気性分解の影響もある。しかしここでは簡単に堆積物のない場合を考えており，また，添加による流量変化を考えないとすれば，A～B 間での濃度増加は単純に

$$dF = c_*(x,t)\cdot dx \qquad \cdots\cdots(5)$$

と書けよう。c_* は dx 区間での同種物質の単位時間流入量からもまる。

5) 光合成項など：貯水池などを別とすれば，流速の早い河道や下水管では無視してよい。むしろ吸着や付着などの方が問題になるが，これを(4)式に含ませて考えることができる。

以上 (2)，$(3)_1$，$(3)_2$，(4)，(5) の計は，AB 間での時間的変化による増分 $dT = h\frac{\partial c_m}{\partial t}dx$ と釣り合うので，断面平均値を導入した一般的な式として (6) 式，$e_x=e_y=\epsilon$，$\alpha=\mathrm{const.}$ のとき (7) 式を得る。

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = -u_m\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 c_m) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_1 e_{xm}\frac{\partial c_m}{\partial x}\right) + \gamma_1 - kc_m + c_*'(x,t) \quad (\gamma_1 = \gamma/h,\ c_*' = c_*/h) \qquad \cdots\cdots(6)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = -(1+\alpha)u_m\frac{\partial c_m}{\partial x} + 0.067\,u_*h\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_1\frac{\partial c_m}{\partial x}\right) - kc_m + c_*'(x,t) \qquad \cdots\cdots(7)$$

流路での汚濁添加がない場合の解析例――$\beta_1 e_x$ が c の関数としてあらわせる場合

(6)，(7) は実際計算に用いうるが，正確には解析解をうる努力が必要である。例として (7)式で右辺末項がなく，$\beta_1 e_x$ が c の関数，または下記のパラメータ η の関数で与えられる場合は解析解をうることができる。紙数の関係で詳細は略すが，このときは $\alpha_1=\mathrm{const.}$ として $(1+\alpha)u_m = u_1$ とし

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} = -u_1\frac{\partial c_m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_1 e_x\frac{\partial c_m}{\partial x}\right) - kc_m$$

に対し，$t=0,\ x>0$ で $c_m = c_1$，$t=0,\ x<0$ で $c_m = c_2$ の条件を与え，$c_m = \theta\exp[-kt]$ の変換，および，$\eta = (x-u_1t)/2t^{1/2}$ なる新パラメータ η の導入により solution がえられる。講演の際時間が与えられれば説明を行なう。