

九州大学工学部 正員 上田年比古

全 正員 ○杉尾 哲

1. まえびき 本報は上面に湛水があり、円形暗きよ内は被圧水で満たされている場合の暗きよ取水について、まず浸透領域が領域の全幅よりも狭い範囲から流入（有限流入部）する長方形の場合を m 関数によって解析し、次いでこの領域を水平方向、鉛直方向およびこの両方向を無限大に拡げた場合の取水量算定式を求めたものである。なお、一般によく用いられている Muskat¹⁾式は近似的に暗きよ中心を写像関数の流入点として解析により取水量を求められているので、両点のずれによる算定誤差が生ずると考えられる。したがって本報では与えられた暗きよ断面周壁を等ポテンシャル線とする理論的流入点（写像関数の流入点）を用いて解析した。またこの計算結果と被膜抵抗体を用いた電気モデルの実験結果と比較検討している。

2. 基礎式 浸透流の解析は複素ポテンシャルを利用し、流れの場の座標軸を図-1のように取って、 W を複素速度ポテンシャル、 Φ を速度ポテンシャル、 ψ を流れ関数、 u, v をそれぞれ x, y の正方向の流れ、 k を透水係数、 p を流れの場の任意点の圧力、 h をその点の全水頭とすれば、2次元非回転定常流の基礎理論から次式が成り立つ。

$$Z = x + iy, W = \Phi + i\psi \quad (1)$$

$$u = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right), v = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \quad (2)$$

$$\frac{dW}{dZ} = -u + iv$$

$$\Phi = kh = k(p/\rho g - z) \quad (3)$$

3. 写像関数 いま、均一無限大の浸透領域（図-2の t 平面）に強さ μ の流入点と地表面から入の深さにある流れを考えると、この写像関数は次式で与えられている。

$$W = \mu \log_e \frac{t - \lambda}{t + \lambda} + \mu', (\mu': \text{実定数}) \quad (4)$$

この浸透領域を $t = \tanh C\zeta$ (C : 実係数) と写像すれば、鉛直方向にだけ無限大の領域（図-2の ζ 平面）となり、さらに $\sinh C\zeta = Z/B$ (B : 実定数) と写像すれば $2B$ の有無限入部をもつ半無限領域（図-2の Z 平面）がえられる。

$$W = \mu \log_e \frac{Z - A\sqrt{B^2 + Z^2}/\sqrt{B^2 + A^2}}{Z + A\sqrt{B^2 + Z^2}/\sqrt{B^2 + A^2}} + \mu' \quad (5)$$

$$\therefore \sinh C\alpha = A/B.$$

ここで、 Z 平面を図-3の左図のように ($0 < A < 1$) 考えれば、

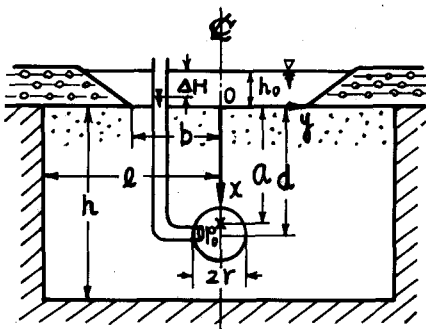


図-1 流れの場

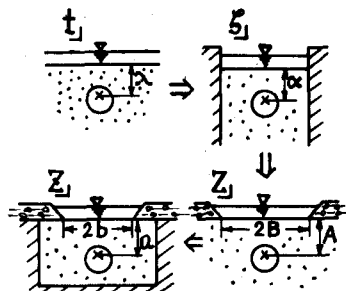
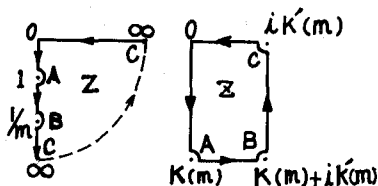


図-2 写像の繰返し

図-3 $Z = m(Z, m)$ による写像

そのオ1象限を長方形領域にとり込める写像関数は Schwarz-Christoffel の定理により、

$$Z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2 z^2)}} \quad (m: \text{母数}) \quad (6)$$

すなわちオ1種楕円関数で、あるいはその逆関数の $Z = X + iY = sn(CZ, m)$ (7)

で定義される sn 関数で表わされる。したがって、この半無限領域を式(7)で写像すれば有限流入部をもつ長方形浸透領域(図-2のZ平面、すなわち図-1の流場の場)が得られ、写像関数は次式のようになる。

$$W = \mu \log_e \frac{sn(CZ, m) - sn(Ca, m) \sqrt{ac^2(Cb, m') + m'^2(CZ, m)}}{sn(CZ, m) + sn(Ca, m) \sqrt{ac^2(Cb, m') + m'^2(CZ, m)}} + \mu' \quad (8)$$

$$\text{ここに、} A = sn(Ca, m), B = sn(Cbi, m) = sn(Cb, m') / cn(Cb, m') = ac(Cb, m')$$

なお、 sn 関数の値は Jacobi の楕円関数表²⁾から求めるかあるいは Maclaurin 級数で展開した次式(但し、 $z=0$ の近傍で収束する。)と sn 関数の加法定理を繰返すことにより数値計算できる。

$$Z = sn(z, m) = z - \frac{(1+m^2)}{3!} z^3 + \frac{(1+14m^2+m^4)}{5!} z^5 - \frac{(1+135m^2+135m^4+m^6)}{7!} z^7 + \dots \quad (9)$$

4. 解析 いま、式を簡略化するために sn 関数の母数を省略し、実数 F, G を次のように置けば、式(8)の根号は式(10)に示すような実数部と虚数部に分けることができる。

$$F = ac^2Cb \left\{ 1 - sn^2Cy \cdot dn^2Cx \right\}^2 + sn^2Cx \cdot dn^2Cy - sn^2Cy \cdot cn^2Cx \cdot cn^2Cy \cdot dn^2Cx \\ G = \left\{ 1 - sn^2Cy \cdot dn^2Cx \right\}^2 \cdot sn^2Cx \cdot sn^2Cy \cdot cn^2Cx \cdot cn^2Cy \cdot dn^2Cx \cdot dn^2Cy \quad (10)$$

$$\sqrt{ac^2Cb + m'^2CZ} = \left\{ \sqrt{F + \sqrt{F^2 + 4G}} + \sqrt{-F + \sqrt{F^2 + 4G}} \right\} / \sqrt{2(1 - sn^2Cy \cdot dn^2Cx)} \quad (11)$$

ここに、速度ポテンシャル Φ および流れ関数 ψ は式(8)を sn 関数の虚数の加法定理を使って分けて実数部と虚数部で表わされるので、さらに実定数 D を次式のようにおけば式(13)、(14)で表わされる。

$$D = snCa / \sqrt{ac^2Cb + m'^2Ca} \quad (12)$$

$$\Phi = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \log_e \left\{ \frac{snCy \cdot dnCy - D \sqrt{F + \sqrt{F^2 + 4G}} / \sqrt{2}}{snCy \cdot dnCy + D \sqrt{F + \sqrt{F^2 + 4G}} / \sqrt{2}} \right\}^2 + \left\{ \frac{snCy \cdot cnCx \cdot cnCy \cdot dnCx - D \sqrt{-F + \sqrt{F^2 + 4G}} / \sqrt{2}}{snCy \cdot cnCx \cdot cnCy \cdot dnCx + D \sqrt{-F + \sqrt{F^2 + 4G}} / \sqrt{2}} \right\}^2 + \mu' \quad (13)$$

$$\psi = \mu \tan^{-1} \frac{\sqrt{2} D \left\{ snCy \cdot cnCx \cdot cnCy \cdot dnCx \sqrt{F + \sqrt{F^2 + 4G}} - snCx \cdot dnCy \sqrt{-F + \sqrt{F^2 + 4G}} \right\}^2}{sn^2Cx \cdot dn^2Cy + m'^2Cy \cdot cn^2Cx \cdot cn^2Cy \cdot dn^2Cx - D^2 \sqrt{F^2 + 4G}} \quad (14)$$

○諸定数の算定 まず、流入点の強さ μ は地表面($z=0$)からの流入量を求めることにより与えられる。

$$\text{ここに、式(2)より、} Q = 2 \int_0^b u_{z=0} dy = 4\mu D \int_0^b \frac{dnCy}{cn^2Cy} \left/ \left\{ \frac{ac^2Cy}{ac^2Cb} + D^2 \left(1 - \frac{ac^2Cy}{ac^2Cb} \right) \right\} \sqrt{1 - \frac{ac^2Cy}{ac^2Cb}} \right. \cdot dy = 2\mu \pi \\ \therefore \mu = Q/2\pi \quad (15)$$

また、地表面の速度ポテンシャルは浸水圧 $p = \rho g h_0$ を式(3)に代入して $\Phi = p/h_0$ で表わされるが、式(13)は $z=0$ の時 $\Phi = \mu'$ となるので、次式が成り立つこととなる。 $\mu' = p/h_0$ (16)

次に流れの場の中心線上(Z 軸)における速度ポテンシャルは、式(13)に $y=0$ と式(15)、(16)を代入し

$$\Phi_{y=0} = \frac{Q}{4\pi} \log_e \left\{ \frac{snCx - D \sqrt{ac^2Cb + m'^2Cx}}{snCx + D \sqrt{ac^2Cb + m'^2Cx}} \right\}^2 + p/h_0 \quad (17)$$

で表わされる。したがって、集水暗渠周壁を等ポテンシャル線とする理論的流入点 a を含んだ定数 D の値は、式(17)を $\Phi_{y=d+r} = \Phi_{y=d-r}$ で解くと次式のようになる。

$$D = \sqrt{\frac{ac\{C(d+r)\} \cdot ac\{C(d-r)\}}{[ac^2Cb + am^2\{C(d+r)\}][ac^2Cb + am^2\{C(d-r)\}]^2}} \quad (18)$$

また、 $K(m)$, $K'(m)$ をそれぞれ母数 m , 補母数 m' について式(6)右辺の上限を1とし定積分で定義されるオ1種完全楕円積分とすれば、 $x=h$ の時に $X=1$, $y=l$ の時に $Y=1$ の条件より式(7)において $Ch = K(m)$, $Cl = K'(m)$ が成り立ち、次式を得る。

$$C = K(m)/h = K'(m)/l \quad (19)$$

また、この式より

$$K'(m)/K(m) = l/h \quad (20)$$

となり、母数 m の値は浸透領域の形状によって与えられ、オ1種完全楕円積分表³⁾から求められる。

○取水量算定式 いま、暗まよ中心の圧力を p_0 とすれば、暗まよ周壁の速度ポテンシャル Φ は式(3)

$$\Phi_0 = \text{Re}\{p_0/sg - d\} \quad (21)$$

(18) によって、式(18), (19), (21) と $x=d+r$ あるいは $x=d-r$ と式(17)に代入すれば、有限流入部をもつ長方形浸透領域の集水暗まよ取水量 Q は次式で与えられる。

$$Q = 2\pi k \Delta H / \log_e \frac{\sqrt{\frac{am\{K(m)(d+r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\} + am\{K(m)(d-r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\} + am^2\{K(m)(d+r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\}}{am\{K(m)(d+r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\} + am^2\{K(m)(d-r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\} + am^2\{K(m)(d+r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\}}} - \sqrt{\frac{am\{K(m)(d-r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\} + am\{K(m)(d+r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\} + am^2\{K(m)(d-r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\}}{am\{K(m)(d-r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\} + am^2\{K(m)(d+r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\} + am^2\{K(m)(d-r)\}m\{ac^2\frac{K(m)}{h}b, m\}}}} \quad (22)$$

$$= \log_e \Delta H = h_0 + d - p_0/sg.$$

5. 領域の拡大. am 関数の定義より.

$$m^2 + m'^2 = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} m=0 \text{ で } am(z, m) &= \sin z, & K(m) &= \pi/2, & K'(m) &= \infty. & (\text{式(20)より } l=\infty \text{ の場合}) \\ m=1 \text{ で } am(z, m) &= \tanh z, & K(m) &= \infty, & K'(m) &= \pi/2. & (\text{式(20)より } h=\infty \text{ の場合}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(18) によって式(22)より次式が得られる。

○有限流入部をもつ水平方向に無限大の領域の集水暗まよの取水量は、

$$Q_{(l=\infty)} = 2\pi k \Delta H / \log_e \frac{\sqrt{\frac{\sin \frac{\pi}{2h}(d+r) \sqrt{\sinh^2 \frac{\pi}{2h} b + \sin^2 \frac{\pi}{2h}(d-r)}}{\sin \frac{\pi}{2h}(d+r) \sqrt{\sinh^2 \frac{\pi}{2h} b + \sin^2 \frac{\pi}{2h}(d-r)}} + \frac{\sin \frac{\pi}{2h}(d-r) \sqrt{\sinh^2 \frac{\pi}{2h} b + \sin^2 \frac{\pi}{2h}(d+r)}}{\sin \frac{\pi}{2h}(d-r) \sqrt{\sinh^2 \frac{\pi}{2h} b + \sin^2 \frac{\pi}{2h}(d+r)}}}}{\sqrt{\frac{\sin \frac{\pi}{2h}(d+r) \sqrt{\sinh^2 \frac{\pi}{2h} b + \sin^2 \frac{\pi}{2h}(d-r)}}{\sin \frac{\pi}{2h}(d+r) \sqrt{\sinh^2 \frac{\pi}{2h} b + \sin^2 \frac{\pi}{2h}(d-r)}} - \frac{\sin \frac{\pi}{2h}(d-r) \sqrt{\sinh^2 \frac{\pi}{2h} b + \sin^2 \frac{\pi}{2h}(d+r)}}{\sin \frac{\pi}{2h}(d-r) \sqrt{\sinh^2 \frac{\pi}{2h} b + \sin^2 \frac{\pi}{2h}(d+r)}}}} \quad (24)$$

○有限流入部をもつ鉛直方向に無限大の領域の集水暗まよの取水量は、

$$Q_{(h=\infty)} = 2\pi k \Delta H / \log_e \frac{\sqrt{\frac{\tanh \frac{\pi}{2l}(d+r) \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2l} b + \tanh^2 \frac{\pi}{2l}(d-r)}}{\tanh \frac{\pi}{2l}(d+r) \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2l} b + \tanh^2 \frac{\pi}{2l}(d-r)}} + \frac{\tanh \frac{\pi}{2l}(d-r) \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2l} b + \tanh^2 \frac{\pi}{2l}(d+r)}}{\tanh \frac{\pi}{2l}(d-r) \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2l} b + \tanh^2 \frac{\pi}{2l}(d+r)}}}}{\sqrt{\frac{\tanh \frac{\pi}{2l}(d+r) \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2l} b + \tanh^2 \frac{\pi}{2l}(d-r)}}{\tanh \frac{\pi}{2l}(d+r) \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2l} b + \tanh^2 \frac{\pi}{2l}(d-r)}} - \frac{\tanh \frac{\pi}{2l}(d-r) \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2l} b + \tanh^2 \frac{\pi}{2l}(d+r)}}{\tanh \frac{\pi}{2l}(d-r) \sqrt{\tan^2 \frac{\pi}{2l} b + \tanh^2 \frac{\pi}{2l}(d+r)}}}} \quad (25)$$

○有限流入部をもつ半無限領域において、

式(24)の $\sin$ および $\sinh$ を展開して $h=\infty$ とするがあるいは式(25)の $\tan$ および $\tanh$ を展開して $l=\infty$ とすれば、有限流入部をもつ半無限領域の集水暗まよの取水量は、

$$Q_{(h=\infty)} = 2\pi k \Delta H / \log_e \frac{\sqrt{(d+r)\sqrt{b^2 + (d-r)^2}} + \sqrt{(d-r)\sqrt{b^2 + (d+r)^2}}}{\sqrt{(d+r)\sqrt{b^2 + (d-r)^2}} - \sqrt{(d-r)\sqrt{b^2 + (d+r)^2}}} \quad (26)$$

なお、この式(26)は式(5)の写像関数から直接求めたも同じ結果を得る。また、式(26)と同じ境界条件のもとに求められた Muskat 式⁴⁾は

$$Q_M = 2\pi k \Delta H / \log_e \{2d(1 + d^2/b^2)/r\}$$

と表わされているが、これは式(26)において $a=d$ の近似を行った解と一致している。

6. 取水量算定式の検討 以上の式の誘導は式(4)から出発して写像の繰返しにより得られたものである。(18) によって、式(4)の浸透領域で実軸を共軸とする円群ごもった等ポテンシャル線は写像の繰返しの影響を受けて円よりも多少歪んだものとなり、暗まよ断面周壁と完全には一致しない。このため

解析結果は厳密解とならないが、この写像による歪みの最も大きく表われる $d=h-r$ の附近以外は近似的に円とみなしてもよいのではないかと考えられる。なお、 $r/d=0.1$ について行った実験結果も図-4のように $h/d=1+r/d=1.1$ (ほぼ2.5%の誤差) 以外は式(22)による算定結果とよく一致している。またこの図から $h/d, l/d$ が3以上になると $Q/k_{\text{eff}}H$ はほとんど増加しないことがわかる。次に半無限領域の場合にはMuskatにより写像の重ね合せを用いて求められたQM式があるが、これは円形暗まよ中心を流入点として求められているため、 r/d が増加すると、すなわち、暗まよの半径が大きくなる、暗まよの位置が地表面に近くなると理論的流入点と暗まよ中心とのずれが大きくなり、式(26)との算定流入量の誤差が大きくなる。なお、式(26)も上記のように厳密解ではないが、式(5)の写像関数から求めた④の式を数値計算して等ポテンシャル線を描いてみると、式(22)の浸透領域の場合に比べて領域の広さには制限が加えられていないため、ほぼ $r/d < 0.5$ の範囲の等ポテンシャル線は円に極めて近く、したがって式(26)はほぼ厳密解と考えられる。次に $b/d=0.5, r/d=0.1$ において式(22)の算定結果が式(24)~(26)の算定結果と等しく(算定誤差: 0.05%以内)なる $h/d, l/d$ の範囲は図-5のようになる。また、図-6に示した計算結果から次のことがいえる。

- (1) $l/h \sim Q/k_{\text{eff}}H$ l/h を大きくすると $Q/k_{\text{eff}}H$ も大きくなるが、その増加率は l/h が小さい時に大きく、 l/h が3以上ではほとんど増加しないようである。
- (2) $b/d \sim Q/k_{\text{eff}}H$ b/d を小さくすると $Q/k_{\text{eff}}H$ は小さくなるが、その減少率は b/l が1に近いほど小さく、 $b/l=0.8$ は $b/l=1.0$ の時とほぼ同じのようである。
- (3) $r/h, d/h \sim Q/k_{\text{eff}}H$ r/d を大きくすると $Q/k_{\text{eff}}H$ は大きくなり、 d/h を大きくすると $Q/k_{\text{eff}}H$ は小さくなる。その減少率は $(d+r)/h$ が1に近づくほど小さい。これらの結果から、浸透領域あるいは流入幅をいたずらに大きくしても無意味であることがわかる。なお、以上の数値計算には九州大学中央施設 OKITAC 5090Hを使用した。

参考文献: 1) Muskat: Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, 1946, P.191.

2) 林桂一, 森田繁一: 高等関数表, 岩波書店, 1967, P.348.

3) 前記同じ, P.332.

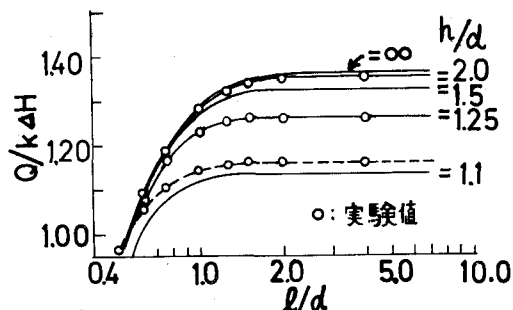


図-4 長方形領域の理論値と実験値

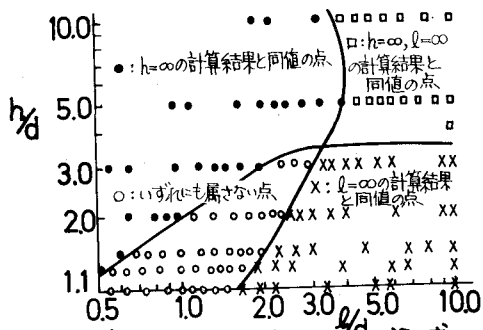


図-5 式(24)~(26)で算定される領域

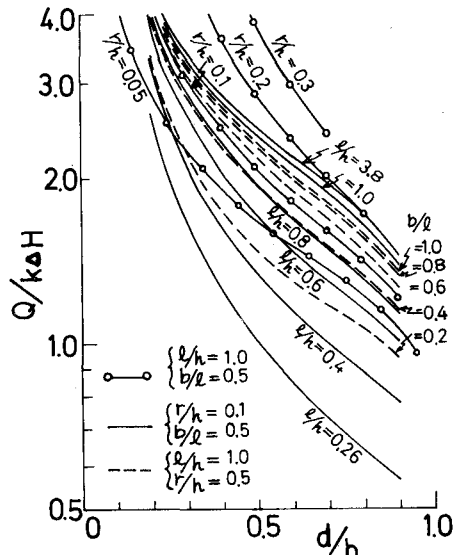


図-6 境界のちがいはる取水量の変化