

## まえがき

Steady confined seepage 問題を解析する場合, Darcy's law (運動方程式) と連続の方程式とから成立するラプラスの方程式を用いることが多い (ポテンシャル理論)。しかし, 流速が大きくなると Darcy's law は成立しなくなり, Forchheimer 則が成立すると言われている<sup>3)</sup>。ただし, Darcy's law の適用限界は明らかでない。また, 止水壁の先端付近等は流速の相当大きい領域であり, この部分では Darcy's law は成立していないと考えられる。そこで, Confined seepage 問題で, この流速の大きい Darcy's law が成立しなくなると考えられる領域が発達するとどのような現象を生ずるかを実験的に検討した。実験は有限領域の矢板のまわりの流れに関して行なった。ポテンシャル理論から得られる結果と実験結果とは一致せず, 上流側と下流側の水位差の増加に対して流量は直線的に増加しないという結果を得た。そこで, こうした現象を運動方程式に Forchheimer 則を適用することによって説明しようとした。

Ⅰ 実験 実験は有限領域の矢板のまわりの流れに関して行なった。(図1参照) この実験で用いた砂礫(porous media)の粒度分布は表1に示めすとおりである。

また, この試料について透水試験を行なった。その結果を図2に示めす。この透水試験結果から Forchheimer 則として(1)式を得た。

$$H/L = -0.27V - 0.25V^2 \quad (\text{cm-sec}) \quad (1)$$

$H/L$ : 動水勾配  $V$ : 断面平均流速

図3に実験結果を流量 $q$ と上下流の水位差 $H$ に関して示めす。実験は $R=40\text{cm}$  ( $R$ : porous mediaの深さ),  $d=20\text{cm}$  ( $d$ : 矢板の深さ) の場合と,  $R=40\text{cm}$ ,  $d=30\text{cm}$  の場合の二

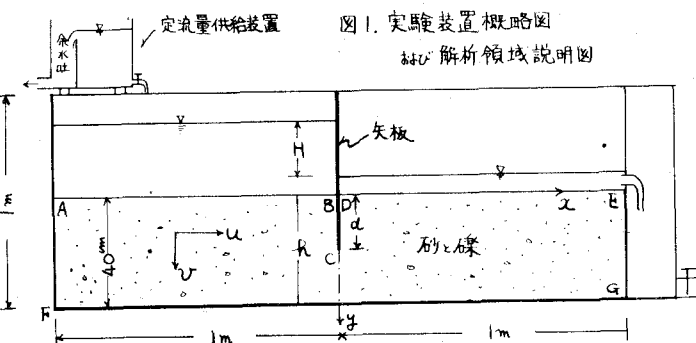


表1 実験に用いた試料の粒度分布

| 粒径  | 10mm以上 | 10~4.8mm | 4.8~2.0mm | 2.0~0.85mm | 0.85mm以下 |
|-----|--------|----------|-----------|------------|----------|
| 百分率 | 0.3%   | 26.6%    | 67.3%     | 5.7%       | 0.1%     |

つについて行なった。両方とも流量の小さい場合にはポテンシャル理論から得られる解析結果と良く一致しているのに対し, 流量が大きくなるとポテンシャル理論から得られる解析結果と一致しなくなる。すなわち, 上下流の水位差の増加に対して流量は直線的に増加しないという結果を得た。以上に示めすように, 流速の大きい領域が発達するとポテンシャル理論では説明できなくなる。すなわち, 流量が大きくなると矢板先端と不透層との間の流速もそれだけ大きくなり, Darcy's law が成立しなくなると考えられる。

Ⅱ 解析 上述の実験で得たポテンシャル理論から逸脱する部分を, 運動方程式に Forchheimer 則を適用することにより理論的に検討する。

Forchheimer 則は次式で与えられる。

$\alpha$ : 定数 [ $L^{-1}T$ ]  $\beta$ : 定数 [ $L^{-2}T^2$ ]  $R$ : 水頭 [ $L$ ]  $x, y$ : 座標 [ $L$ ]  $u, v$ :  $x, y$  方向の流速 [ $L^{-1}T$ ]

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= -au - e|u|u \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= -av - e|v|v\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \dots a \dots \\ \dots e \dots \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots (3)$$

である。流れの函数  $\psi(x, y)$  を導入して速度  $u, v$  を次式 (4) で表わせば (3) 式は恒等的にみたされる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots (4)$$

### 1 基礎方程式の誘導

(1) 流れの函数  $\psi$  について

(4) 式を (2) 式に代入し水頭  $h$  の項を消去すると流れの函数  $\psi$  について次式を得る。

(i)  $u > 0, v > 0$  のとき

$$-a \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} + 2b \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} = 0 \quad \dots (5a)$$

(ii)  $u > 0, v < 0$  のとき

$$-a \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} - 2b \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} = 0 \quad \dots (5b)$$

confined seepage 問題では座標のとりかたによって、

ほとんどの場合を (i) (ii) を用いて表わすことができる。

(2) 水頭分布  $h$  について

(4) 式を (2) 式に代入して整理すると次式を得る。

(i)  $u > 0, v > 0$  のとき

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -2b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad \dots (6a)$$

(ii)  $u > 0, v < 0$  のとき

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -2b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad \dots (6b)$$

(5) 式 (6) 式において  $b = 0$  のとき、すなわち Darcy's law が成立する場合には

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (7)$$

となりラプラスの方程式 (ポテンシャル理論) が成立する。

### 2 境界条件 (図1 参照)

・流入面 (AB) [流出面 (DE)] では水頭  $h$  は一定であるから  $\partial h / \partial x = 0$  (したがって  $u = 0$  である。これより  $\partial \psi / \partial y = 0$  を得る。  $\dots (8)$

図2 透水試験結果

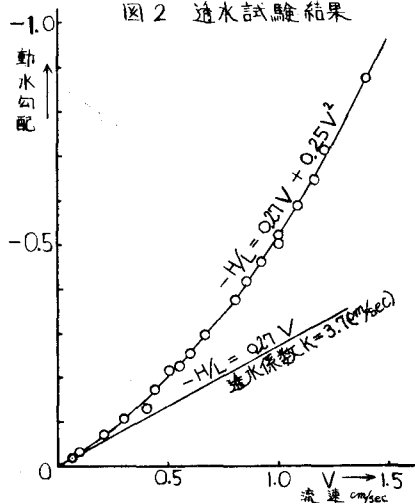
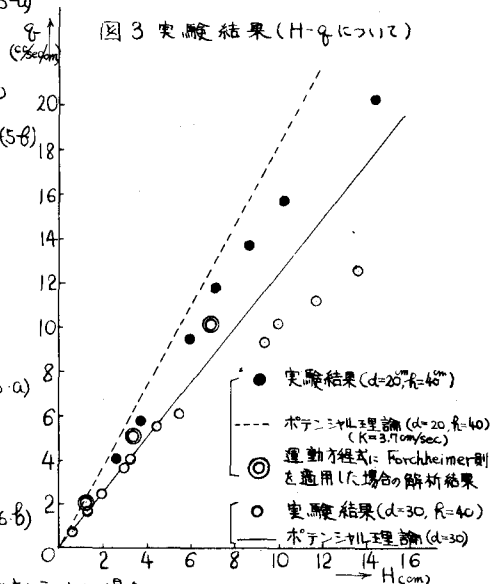


図3 実験結果 (H- $q$  について)



○不透壁 流れの函数について：不透壁 (AFGE または BC) は一つの流線である。(したがって不透壁上の流れの函数の値は一定値で与える。  $\psi_{ape} = \text{const.}$   $\psi_{eco} = 0.0$  ..... (9)

水頭について：不透壁を横切る流れはない。(したがって水頭については次の条件式を得る。

AF, EG, BC, CD上では  
FG 上では

$\partial h / \partial x = 0$   
 $\partial h / \partial y = 0$

$(\because u = 0)$   
 $(\because v = 0)$

}

..... (10)

### 3 解法

(5)式と(8)(9)式を条件に用いて図1の場合について解析する。非線型方程式(5)式を解くのに Cowley-Levy の解法<sup>1)</sup>を用いる。図1のように流れがy軸に対して対称である場合にはy軸上に境界条件として対称の条件を入れることによって(5-a)式を  $u \geq 0, v \geq 0$  の領域のみについて解けば良い。y軸に対して対称でない場合には、それぞれの場合についてそれぞれの式(5-a)(5-b)を用いて解析せねばならない。まず次の関係式を用いて(5-a)式を無次元化する。整理すると(11)式を得る。

$\Psi = \psi / \psi_c$ 
 $X = x / T$ 
 $Y = y / T$

$\Psi, X, Y$  : 無次元量       $\psi_c$  : 代表となる流れの函数の値      T : 代表寸法

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = \frac{2\theta\psi_c}{aT} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Psi}{\partial X^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y^2} \right) \tag{11}$$

$C = \frac{2\theta\psi_c}{aT}$  とおき  $\Psi = \Psi_0 + C\Psi_1 + C^2\Psi_2 + \dots + C^n\Psi_n$  と仮定し、これを(11)式に代入する。次に  $C, C^2, \dots, C^n$  の各係数について比較すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial Y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial Y^2} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial X} \frac{\partial \Psi_0}{\partial X^2} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial Y} \frac{\partial \Psi_0}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial Y^2} = \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial X} \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial X^2} - \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial Y} \frac{\partial \Psi_{n-1}}{\partial Y^2}$$

----- (i)

----- (ii)

----- (n)

}

(12)

この方程式群で、まず(i)式を解いて  $\Psi_0$  を得る。 $\Psi_0$  を(ii)式に代入し右辺を計算し  $\Psi_1$  を求める。必要な精度が得られるまでこれを繰り返す。(12)式の計算にあたっては、境界の形状、境界条件が複雑であるので解析的に解くのは困難である。そこで数値解法を用いる。(12)式は楕円型の微分方程式となるので S.O.R 法(逐次式加速緩和法)<sup>2)</sup>を用い容易に解ける。

(5)式を用いて  $\psi$  の値を得たあとに、これを(6)式に代入して、その右辺を計算し水頭  $h$  の値を求める。(6)式も右辺が既知となるとポアソン方程式となるので S.O.R. 法により数値解を得ることができる。

実際の計算については次のように行なう。まず条件として AFGE の流れの函数の値を与える。この値は単位巾当りの浸透流量  $q$  に等しい。この条件を用いて  $\psi$  について解析する。次にこの流れで一つの流線に沿う損失水頭を求める。図1の場合には次式によって求める。

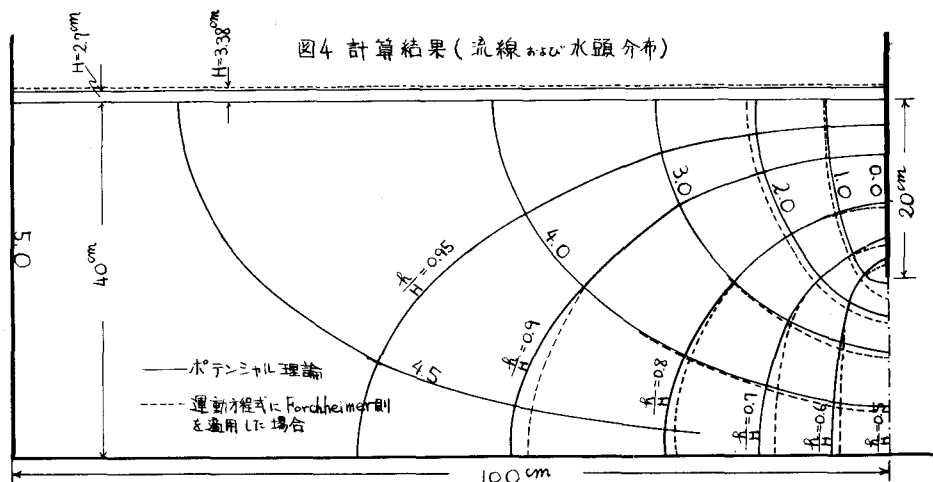
$$H = 2 \int_A^F (av + bv^2) dy + \int_F^G (au + bu^2) dx$$

この H の値を流入側の条件として(6)式を用いて水頭分布を計算する。

### 4 計算結果

Forchheimer 則に(1)式を用い単位巾当りの流量  $q = 5 \text{ cm}^3/\text{cm}$ ,  $h = 40 \text{ cm}$ ,  $d = 20 \text{ cm}$  についての計算結

果を図4に示す。この場合、ポテンシャル理論では  $H=2.70\text{cm}$  であったが、Forchheimer則を用いた場合には  $H=3.38\text{cm}$  となった。 $q=10\text{cc/sec/cm}$ 、 $q=2\text{cc/sec/cm}$  について同じ条件で求めた  $H$  の値を図3に示す。



### Ⅲ 考察

図3に示めすように流量が大きくなると実験結果では  $H$  と  $q$  の関係は直線とはならない。すなわちポテンシャル理論から得られる結果がはずれてくる。一方運動方程式にForchheimer則を用いた理論から得られる  $q-H$  の関係は実験結果の特性と一致し、量的にもかなり良い適合度を示す。

したがって、ポテンシャル理論からのずれを運動方程式にForchheimer則を適用することによって説明づけることができると考えられる。

なお、ここでとりあげた矢板のまわりの流水等における confined seepage 問題では同じ流量を流すのにポテンシャル理論から得られる水頭より大きい水頭が必要である。(したがって、漏水量の点からのみ見ると運動方程式にForchheimer則の適用は安全側であり設計上からはそれほど問題でない。反対に砂礫層からの集水暗キョによる取水等では問題となってこよう。

### あ と が き

Confined Seepage 問題の理論解析の拡張を試みた。しかし基礎式が非線型方程式であり解析が困難である。一応 Cowley-Levy の解法を適用し解を得たが、この場合、展開式の収束の問題、種々の誤差の問題等検討を必要とする点が多い。これは今後検討していきたいと考えている。

なお、これらの計算には KDC-II を使用した。

### 参考文献

- 1) W.L. Cowley and H. Levy Phil. Mag. VI 41 1921. pp. 584-607
- 2) 一松 信 他 2名 数値計算法(1) 培風館 p163-172
- 3) J.C. Ward A.S.C.E. vol. 90 sep. 1964. HY-5