

埼玉大学理工学部 正員 工博 嶋 祐之

従来、自由表面を持つ地下水の非定常現象は、自由表面の変動が比較的緩慢な場合を想定し、鉛直流速を無視した解析が行われてきた。すなわち、任意の鉛直断面内の圧力分布は静水圧分布を呈し、従って鉛直断面内での流速は一樣であると云う、準一樣流の仮定に基づいていた。しかし、このような解析では、浸出面の大きさを規定できないだけでなく、自由表面の場所的および時間的変動が急な場合、変動特性を正しく把握することができない。そこで、本報告では、ダルシー法則が適用される範囲内で、自由表面の変動が比較的急な場合、浸透流の非定常現象を取扱うこととし、鉛直流速の及ぼす影響を考慮しつつ、その理論的特性につき検討を行った。

1 基礎方程式の誘導

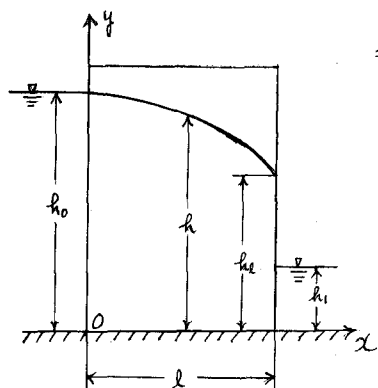


図-1 堤体浸透流

透水層は、Homogeneous であつて、ダルシー法則が適用されるものとするれば、運動方程式は次式で示される。

$$u = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho g} + y \right) \quad \text{---- (1)}$$

$$v = -k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho g} + y \right) \quad \text{---- (2)}$$

こゝに

u, v ----- x および y 方向の流速成分

$p/\rho g$ ----- 圧力水頭, k ----- 透水性係数

流れは、非圧縮性と考えれば、連続の方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ [v]_0^h &= - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (3)}$$

あるいは、上式を積分して

次に、自由表面の条件として、自由表面上の流れは同じ流復で占められていることより

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} + u_h \frac{\partial h}{\partial x} = v_h \quad \text{---- (4)}$$

また、自由表面は大気圧に接していることより

$$-k \frac{\partial h}{\partial x} = u_h + v_h \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{---- (5)}$$

こゝに、 u_h, v_h ----- 自由表面上での x および y 方向の流速成分

λ ----- Porosity, h ----- 水深

さらに、浸透流の場合として、 $y=0$ に不透水層がある長方形堤体と考えることとし、鉛直流速の y 方向の分布について次のような仮定を行う。

$$v = \frac{y}{R} v_R \quad \text{----- (6)}$$

このようにすれば、未知数は u, v, p, h, u_R および η の 6 箇であるので、条件式 (4) ~ (6) より逐次未知数を消去して、水深 h に関し次のような基礎微分方程式を導くことができる。

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h^2 \frac{\lambda \frac{\partial h}{\partial t} - k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2} \right\} \quad \text{--- (7)}$$

上式において、右辺第 2 項は鉛直流速の効果を表わし、これを無視すれば準一様流の場合の基礎方程式となることが知られる。いま、任意鉛直断面を通過する流量を Q とすれば、連続の条件より

$$Q(x, t) \doteq -k \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{3} \left\{ \frac{\lambda}{k} \frac{\partial h}{\partial t} - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] \quad \text{--- (8)}$$

2 定常現象

上記の基礎方程式は妥当であるかどうかを、定常現象に注目して検討を行う。定常現象では、流量 Q は常数となり、(8) より次式が基礎方程式となる。

$$Q = -k \frac{d}{dx} \left\{ \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{3} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right\} \quad \text{----- (9)}$$

いま、上下流水深を h_0 および h_1 、浸水面の水深を h_2 、堤幅を l とし、次のような無次元化を行う。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{Q}{k h_0^2 / 2l}, & \beta &= \frac{h_0^2}{6l^2} \\ \eta &= \left(\frac{h}{h_0} \right)^2, & \xi &= \frac{x}{l} \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (10)}$$

境界条件； $\xi = 0, \quad \eta = 1, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad \text{--- (11)}$
を考慮すれば、(9) は次式で示される。

$$\alpha \xi = 1 - \eta + \beta \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \quad \text{----- (12)}$$

いま上式の解を $\alpha \xi = 1 - \eta + \varepsilon(\eta)$ ----- (13)
とおき、(12) に代入して ε の満足すべき条件式を求めれば次のようになる。

$$\varepsilon + 2\lambda \varepsilon^{\frac{1}{2}} + 2\lambda^2 \log \left(1 - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\lambda} \right) = \eta - 1 \quad \text{---- (14)}$$

こゝに、 $\lambda = \alpha \beta^{\frac{1}{2}}$ である。もし、Parameter λ すなわち α の値が決定されれば、 ε と η の関係が上式より求められるので、(13) に代入することにより自由水面形状を求めることができる。なお、 $\alpha \xi = 1 - \eta$ は準一様流の定常解に他ならない。

浸水面、 $\xi = 1$ における境界条件は、透水層底部の圧力と、下流透水底底部の圧力が等しいと考えることより、次式で表わされる。

$$\eta_1 - \frac{3}{4} \beta \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_1^2 = \eta_2^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \quad \text{----- (15)}$$

ここに

$$\eta_2 = \left(\frac{h_2}{h_0}\right)^2, \quad k = \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2 \quad \text{---- (16)}$$

(2) および (13) において $\gamma = 1$ としたときの条件式と (15) より, η_2 および $\beta \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2$ を消去すれば, E_2 に関する次の二次方程式が求まる。

$$E_2^2 + 8 \{ (1-\alpha) - 2k \} E_2 + 16(1-\alpha) \{ (1-\alpha) - k \} = 0 \quad \text{---- (17)}$$

さらに, (14) において, $\gamma = 1$ の場合に注目し, なお (13) を考慮すれば

$$E_2^{\frac{1}{2}} + \alpha \beta^{\frac{1}{2}} \log \left(1 - \frac{E_2^{\frac{1}{2}}}{\alpha \beta^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{1}{2\beta^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{---- (18)}$$

兩式より E_2 を消去すれば, 堤体の幾何学的条件 k および β を与えて未定常数 α を求めることができる。図-2 は k および β を Parameter として (17) および (18) をプロットしたもので, 各曲線の左側の交差が求める α の値を表わしている。なお鉛直流速を無視すれば $\alpha = 1 - k$ である。

このようにして α すなわち χ が求められれば, (13) および (14) より自由水面形が求まる。数値計算の一例を示したものが図-3 である。同図より, この解法は浸出面のごく近傍を除いては極めて実験値 (Hamel の厳密解とも) と良く一致することが確かめられる。

図-2

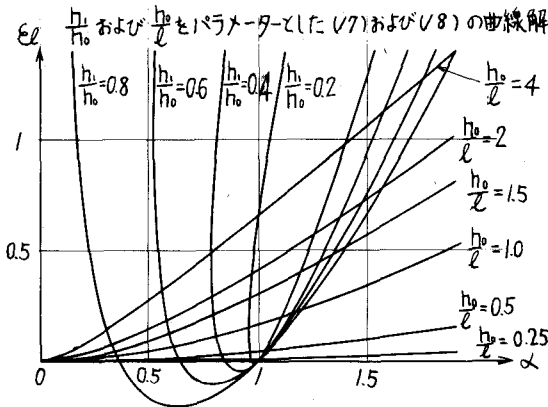
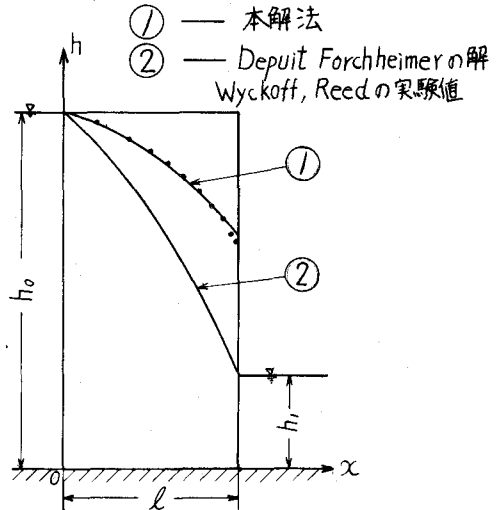


図-3 本解法と他の方法との比較



3 非定常現象

基礎方程式 (7) は, 多くの高次の非線型要素を含んでいるので, 定常流の場合のように解析的な解を見出すことは困難である。そこで $\frac{\partial h}{\partial t}$ の場所的分布に関し次のような仮定を設け, 近似的に解くことを試みる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh_2}{dt} \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \frac{dh_2}{dt} \frac{x}{l} \quad \text{---- (19)}$$

上式を, (7) の右辺第 2 項のうち分母の $(\frac{\partial h}{\partial x})^2$ を省略した式に代入する。流れの場合としては, $x = 0$ の断面も不透水層で, 定常流量の存在しない場を考慮, 境界条件

$$x = 0; \quad h = h_0(t) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{---- (20)}$$

を考慮して, 上述の式を積分し, さらに (10) および (22) を用いて無次元化すれば次式を得る。

$$(1-\eta)\left\{\frac{d\gamma_0}{d\tau}(1-\xi)+\frac{d\gamma_0}{d\tau}\xi+1\right\}+\frac{3\xi^2}{2\gamma_0^2}\left\{\frac{d\gamma_0}{d\tau}(1-\frac{\xi}{3})+\frac{d\gamma_0}{d\tau}\frac{\xi}{3}\right\}+\beta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2=0 \quad (21)$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_0}{l} &= \gamma_0, \quad \frac{h_1}{l} = \gamma_1, \quad \frac{h}{l} = \gamma, \quad \eta = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^2 \\ \frac{3kt}{2\lambda l} &= \tau, \quad \frac{h_0^2}{6l^2} = \beta = \frac{\gamma_0^2}{6} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここで、逐次近似法によって $\beta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2$ を消去し、さらに $\xi=1$ とおけば

$$(\gamma_0^2 - \gamma_1^2)\left(\frac{d\gamma_0}{d\tau} + 1\right) + \frac{d\gamma_0}{d\tau} + \frac{1}{2}\frac{d\gamma_0}{d\tau} + \frac{3}{8}\left(\frac{d\gamma_0}{d\tau} + \frac{d\gamma_0}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (23)$$

一方、 $\xi=1$ の境界条件は、定常流の場合と同様な考え方で表現すれば次式が求められる。

$$\gamma_1 \left\{ 1 + \frac{3}{4}\frac{d\gamma_0}{d\tau} - \frac{9}{32\gamma_1^2}\left(\frac{d\gamma_0}{d\tau} + \frac{d\gamma_0}{d\tau}\right)^2 \right\} = \gamma_1 \quad (24)$$

(23), (24) は γ_0 および γ_1 に関する連立常微分方程式であるので、これらを解けば自由表面の変動状態を知ることができる筈である。しかし、解析的に解くことは不可能であるので、上式の非線型項を省略した場合の2通りの解を求め、それぞれの数値計算結果を図-4および図-5に示す。

前者は、浸出面を無視した場合で、 $\gamma_1 = \gamma_0$ は定数とし

$$\gamma_0^2 - \gamma_1^2 + \frac{d\gamma_0}{d\tau} = 0 \quad (25)$$

を解いたものである。後者は(23)および(24)に対応する線型連立常微分方程式

$$\gamma_0^2 - \gamma_1^2 + \frac{d\gamma_0}{d\tau} + \frac{1}{2}\frac{d\gamma_0}{d\tau} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{d\gamma_0}{d\tau} = -\frac{4}{3\gamma_1}(\gamma_0 - \gamma_1)$$

を解いたものである。

なお、図の記号では

$$\bar{h}_0 = \frac{h_0}{h_{00}} = \frac{\gamma_0(\tau)}{\gamma_0(0)}$$

$$\bar{h}_1 = \frac{h_1}{h_{00}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0(0)}$$

$$\bar{l} = \frac{l}{h_{00}} = \frac{1}{\gamma_0(0)}$$

h_{00} --- 上流端の初期水深

として表わしている。

これらの図より、浸出面の存在は、自由表面の低下速度を、現象の初期において、かなり遅らせる傾向にあることが認められる。

