

1. 緒 言

河川蛇行の成因については 古くから色々の説が出されているが、未だ定説はないように思われる。戦前までは河川の蛇行は河岸の交互の侵蝕を意味するもののように考えられていたようであるが、

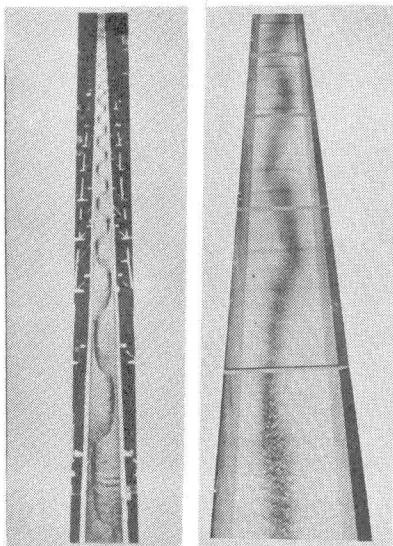


写真1. 交互の sand waves (木下良作博士¹⁾)
写真2. 水流の蛇行 (画面下部より上部に向け流れる)

戦後 木下良作博士は 両岸が剛な直立壁であっても水流の蛇行は起りうるという驚くべき事実を明らかにされた。¹⁾ 本論文で取扱うのは この木下博士の取扱われた場合——剛の側壁を有する矩形断面水路内の交互の斜め sand waves の発生および水流の蛇行 (写真1, 2) についてである。

2. Sand waves の成因

3次元的に交互に起る sand waves の成因を考える前に、本節ではまず2次元的な sand waves (斜めでない sand waves) の成因について考えてみる。

2次元的な sand waves の発生の理論としては、周知のように Kennedy の理論²⁾ がある。彼は水流の流れにポテンシャル理論を適用するとともに、流砂量と流速変化との関係に新しい見解——phase lag——を導入し、dune, anti-dune の発生の可能性および卓越波長などについて研究した。彼の 単位河巾当りの流砂量 (容積) の表現は

$$G(x, t) = m [\phi_x(x - \delta, -d, t)]^n \quad (1)$$

2に、 δ : 遅れの距離, $\phi_x = \partial\phi/\partial x$, d : 水深 ($y = -d$ は河床面),

m, n : 常数

である。彼は2の遅れの距離 δ を 0 から λ (sand wave の波長) まで大巾に変化させて sand wave の増やまたは消滅の条件を研究したが、この理論においては 遅れの距離 δ が大きな役割を果たしている。しかし2の距離 δ は2のまゝでは正体のはっきりしないものであって、これを水理条件と底質の関数として明らかにすることが望まれてきていたように思われる。

本論文においては、(1)式を換して、次のような流砂量方程式が成立するようなモデルについて考えることとする。

$$G(x, t) = m \cdot \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(x - \delta, t)}{\partial x} \right] \cdot \left[\frac{\partial \phi(x - \delta, -d, t)}{\partial x} \right]^n \quad (2)$$

$\alpha \partial \eta / \partial x$ の項を挿入したわけは、sand wave の形状がもし

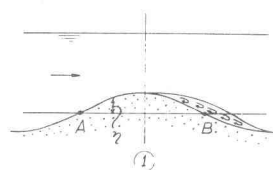


図-1.

図-1. のように対称 (①の断面について) であっても、sand wave の背面には若干の剥離が起

るから、図-1. のA点に作用する剪断力(従ってA点の流砂量)は これと対称なB点に作用する剪断力(従ってB点の流砂量)よりは大きくなるという事実を計算に組み入れるためである。2. に α は近似的に常数と考える。

sand wave 面上に作用する剪断力と それによって動かされる流砂量との間には、厳密にいえはいくらかの遅れの距離 δ がある筈であるから、(2)式にはそれを入れてある。2の δ は Kennedy の δ とは本質的に異なる(底質粒子径の1ないし数倍の値)と考える。

図-2. および 図-3. は(2)式で計算される流砂量の値(破線)と(2)式で $\alpha=0$ とした式で計算される流砂量の値(実線)とを図示したものである。ただし、2.2では説明の簡単化のために、ともに $\delta=0$ の場合について画いてある。これらの図の破線で示された流砂量の場合には、sand wave の山では堆積が起って山は益々高くなり、逆に谷では洗掘が起って谷は益々深くなり、すなわち波高が増中されてゆく、ことが明らかに理解される。 $(\alpha=0$ だと増中しない)。 (2)式と同様の式を次節に使う。 3次元 sand wave (河川蛇行性) の

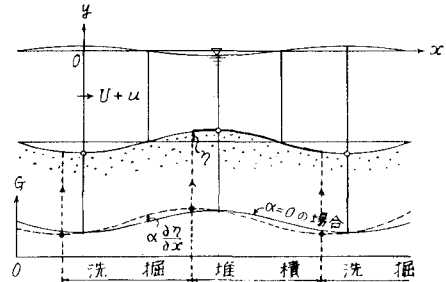


図-2. 流砂量の場所的变化(常流の場合)

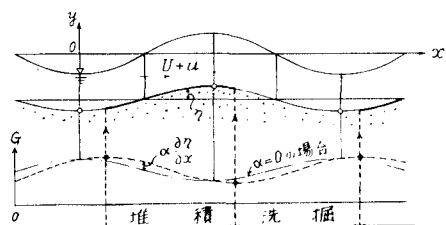


図-3. 流砂量の場所的变化(射流の場合)

3. 蛇行の理論

図-4. のような座標軸をとる。河床には 同図に示したような

$$\eta = a \sin kx \cos lz \dots\dots\dots (3)$$

(ただし $k = 2\pi/\lambda$, $l = \pi/B$) で表わされるような sand waves が与えられたとすると、いかなる λ/B のものが最も増中率が大きいか(あるいは、どの範囲の λ/B のものが減衰するか)を考える。水流にはポテンシャル理論を適用すると、水流中の任意の点で満足されるべき方程式は

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0 \dots\dots\dots (4)$$

水面での条件は

$$0 = -g\eta - \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + \text{const.} \dots\dots (5) \quad \text{および} \quad U y_x = \phi_y \dots\dots (6)$$

水底の条件は

$$\eta = -d + a(t) \sin k(x - U_b t) \cos lz \dots\dots\dots (7)$$

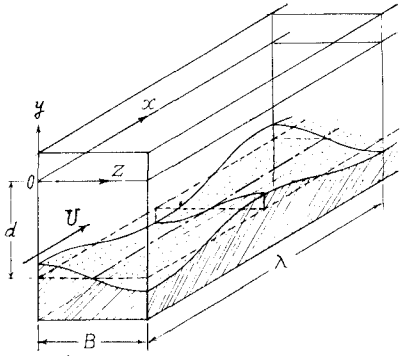


図-4. 交互の斜め sand waves と座標軸

ただし、 a : sand wave の振幅、 U_b : sand wave の移動速度 である。sand wave ができる以前の水流の流速を U (undisturbed velocity) とすれば、これらの境界条件を満足する (4) 式の解は

$$\phi = Ux - \frac{Uk}{\beta} a \frac{\cosh \beta y + (Fr^2 k^2 d / \beta) \sinh \beta y}{\sinh kd - (Fr^2 k^2 d / \beta) \cosh kd} \cos k(x - U_b t) \cos lz \quad (8)$$

ただし、 $\beta = \sqrt{k^2 + l^2}$ 、 $Fr^2 = U^2 / g d$ である。つぎに、流線の方程式

$$\frac{dx}{\partial \phi / \partial x} = \frac{dz}{\partial \phi / \partial z} = \frac{dy}{\partial \phi / \partial y}$$

により $y = -d$ (水底) における流線の形を求めてみるとつぎのようになる:

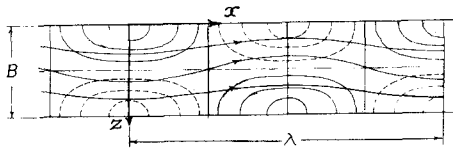


図-5. 河床面上の流線

$$\frac{dz}{dx} = \frac{kl}{\beta} a \frac{1 - (Fr^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (Fr^2 k^2 d / \beta)} \cos k(x - U_b t) \sin lz \quad (9)$$

任意の瞬間におけるこの流線と水底の形状とを併せ示したものが図-5. である。そこで、いま、この瞬間的な流線に沿って S 軸、それと直交して S' 軸をとると、 S 方向への流砂量は (2) 式と同様の式で表わされる筈であって、それは次のようである。

$$G_s = m \cdot \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(s - \delta, s', t)}{\partial s} \right] \cdot \left[\frac{\partial \phi(s - \delta, s', t)}{\partial s} \right]^n \quad (10)$$

ただし、 G_s : S 方向への流砂量 である。sand wave の振幅 a が小さいとして、 α^2 以上の項を無視しながら、上式の G_s を x, z 方向への流砂量成分 G_x および G_z に分解すると、

$$G_x = \bar{G} \cdot \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(x - \delta, z, t)}{\partial x} + \frac{n}{U} \frac{\partial \bar{\phi}(x - \delta, z, t)}{\partial x} + \dots \right] \quad (11)$$

$$G_z = \bar{G} \cdot \frac{dz}{dx} \quad (12)$$

$$\text{ただし、} \bar{G} = m U^n, \quad \bar{\phi} = \phi - Ux \quad (13)$$

(11), (12) の両式を流砂量の連続方程式 $\partial \eta / \partial t + \partial G_x / \partial x + \partial G_z / \partial z = 0$ に代入すると、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{G} \left[\alpha \frac{\partial^2 \eta(x - \delta, z, t)}{\partial x^2} + \frac{n}{U} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x - \delta, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right] = 0 \quad (14)$$

となる。(14) 式に (3) 式、(8) 式から与えられる $\bar{\phi}$ の表現、および (9) 式から与えられる dz/dx を代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{a}}{a} + \bar{G} k^2 \left\{ -\alpha \cos k\delta + \frac{nk}{\beta} \frac{1 - (Fr^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (Fr^2 k^2 d / \beta)} \sin k\delta \right\} \\ & + k \cot k(x - U_b t) \cdot \left[-U_b + \bar{G} k \left\{ \alpha \sin k\delta + \frac{nk}{\beta} \frac{1 - (Fr^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (Fr^2 k^2 d / \beta)} \left(\cos k\delta + \frac{1}{n} \frac{l^2}{k^2} \right) \right\} \right] \\ & = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

となる。とこそ、(7) 式において仮定したように、 a が t のみの関数であるためには、上式において第2行目の $\cot k(x - U_b t)$ にかゝる大カッコの中が 0 にならなければならない。よって

$$U_b = \bar{G} k \left[\alpha \sin k\delta + (nk/\beta) \left\{ 1 - (Fr^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d \right\} / \left\{ \tanh \beta d - (Fr^2 k^2 d / \beta) \right\} (\cos k\delta + l^2 / nk^2) \right] \quad (16)$$

となり、これが sand wave の移動速度を与える。この場合 (15) 式は積分されて、

$$a(t) = a(0) \cdot \exp \left[\bar{G} k^2 \left\{ \alpha \cos k\delta - \frac{nK}{\beta} \frac{1 - (Fr^2 k^2 d/\beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (Fr^2 k^2 d/\beta)} \sin k\delta \right\} t \right] \quad (17)$$

となる。ところで、最初の仮定から明らかなように、 $K\delta \ll \pi/2$ 。よって (16), (17) の両式はそれぞれ次のようになる。

$$U_b = n \bar{G} k \left\{ \frac{\alpha K\delta}{n} + \frac{K}{\beta} \frac{1 - (Fr^2 k^2 d/\beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (Fr^2 k^2 d/\beta)} \left(1 + \frac{1}{n} \frac{l^2}{K^2} \right) \right\} \quad (18)$$

$$a(t) = a(0) \cdot \exp \left[\bar{G} n k^3 \delta \left\{ \frac{\alpha}{n K \delta} - \frac{K}{\beta} \frac{1 - (Fr^2 k^2 d/\beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (Fr^2 k^2 d/\beta)} \right\} \cdot t \right] \quad (19)$$

ここで、 $\bar{G} = m U^n$ の n は $n = 2$ と仮定し、 $\bar{G} = m U^2$ を代入し、 $l = 2\pi/\lambda$ 、

$K = \pi/B$ の関係を使用し、また $\lambda/B = R$ (20) なる記号を用いると、(19)

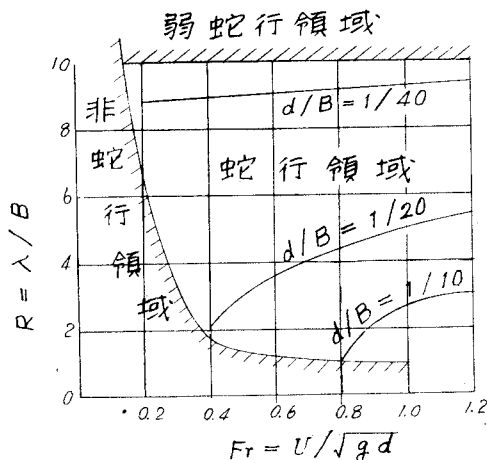
および (18) の両式はそれぞれ次のようになる。

$$a(t) = a(0) \cdot \exp \left[\alpha \pi^2 \frac{mg}{B} \frac{2K\delta}{\alpha} \cdot Fr^2 \frac{d}{B} \left(\frac{2}{R} \right)^2 \left\{ \frac{\alpha}{2K\delta} - f \left(Fr, \frac{d}{B}, R \right) \right\} \cdot t \right] \quad (20)$$

$$U_b = 4\pi mg \cdot Fr^2 \frac{d}{B} \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right\} \cdot f \left(Fr, \frac{d}{B}, R \right) \quad (21)$$

ただし、 $f \left(Fr, \frac{d}{B}, R \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{2} \right)^2}} \frac{1 - \pi Fr^2 \frac{d}{B} \frac{1}{R^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{2} \right)^2} \tanh \left[\pi \frac{d}{B} \sqrt{\left(\frac{2}{R} \right)^2 + 1} \right]}{\tanh \left[\pi \frac{d}{B} \sqrt{\left(\frac{2}{R} \right)^2 + 1} \right] - \pi Fr^2 \frac{d}{B} \frac{1}{R^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{2} \right)^2}} \quad (22)$

(20) 式の e のべきが正となるような場合には、sand waves の波高が時間とともに大きくなる (すなわち、蛇行する) ことを示す。その場合、与えられた Froude 数 および与えられた d/B



四-6. 蛇行範囲

文献 1) 木下昌作, 土木学会論文集, 昭-32, 2月. 2) J.F. Kennedy, Journ. Fluid Mech. 1963-III.

[附記] 本研究の大部分は、1967年度冬学期 Iowa 大学の Visiting prof. として同大学水理研究所において行ったものであり、本研究の着想については同研究所所長 John F. Kennedy 教授よりの討議による所が大きい。この数値計算には 中央大学大学院学生 片山純一郎君 が協力した。また、実験-2 関係の実験は 文部省昭和42年度特定研究「土砂の流出・流送による河川災害の基礎的研究」(研究代表者 名大 西畑勇夫教授) により中大において行われたものである。