

京都大学防災研究所 正員 田中祐一朗

1. はしがき : Sand waves の問題にアプローチする方法は大別すると i) 実用的方法, ii) 力学的的方法, iii) 統計的方法の三つになるように思われる。i) は regime theory に代表されるもので、多くの実験・実測値をもとにして実用的見地から種々の因子の間の関係を求めようとするものである。ii) は現象の物理的機構への考察によって現象を説明しようとするもので、最も望ましいものであるが、現象が複雑な場合はなかなか解析が困難である。iii) は random な現象を統計的に処理することにより、その中にある種々の性質を抽出しようとするものである。著者は先年まで iii) の方法によって若干の検討を行なってきた。この方法による研究を更に進展させていく必要性はいうまでもないが、現象をより良く理解するためには ii) による現象の力学的背景に対する考察も併せて進めて行く必要がある。ii) の方法では従来、potential flow による解析とか shear flow による微小振動法の解析などが行なわれているが、いずれも十分でなくとくに Sand waves の形状を予測できる状態には至っていない。移動床での抵抗の問題を考える場合、Sand waves の形状抵抗が支配的であることが知られており、この意味からもその形状特性が何らかの方法で把握されることが望まれている。そこで本研究はごく大雑把なものではあるが、Sand waves の形状特性とその移動特性について考察することを目的として試みた一つの解析を示すものである。

2. 変形せずに伝播する波動解の存在に関する仮定 : Sand waves も河床変動の一形態である。したがって基礎方程式が現象を忠実に記述しているものであれば、これを解くことによってその解として形状が求まるはずである。従来から用いられている河床変動の基礎式¹⁾は一般に解くことが困難であり、また仮りに解けたとしても振散項のために変形せずに伝播する波動解は求まらない。しかし Kennedy²⁾ は次のように述べている。「Sand waves の波高が徐々に増大して行くと非線形効果が生じ、十分に発達した dune や antidune では平衡な波高が存在する。dune が大きくなるとクレストでの流速や shear が増大し、ついにはクレストで堆積せずまた同様に谷で洗掘が起らず安定する。dune が最大波高をとり、形を変えずに移動する条件は流速と流砂との間の遅れが波長に等しくなることである。また逆に antidune での条件は $\delta = 0$ である。」彼の議論では流速と流砂の間の遅れ δ の物理的意味が不明確で、これで十分な説明をよんでいることにはならないが、変形せずに伝播する wave の存在を示唆したことは注目に値する。また現象をよく観察してみると、平衡状態に達した後では個々の Sand wave は生成・発達・消滅および他のものとの統合を繰り返して複雑であるが、少なくとも統計的な意味では安定な変形せずに伝播する wave が存在するように見える。河床変動の基礎式からこのような解が得られないのは非線形効果などの局所条件が欠けており、基礎式が現象を十分に記述してことによるものであろうか？、この点は未だ明らかでない。そこで、ここでは逆説的ではあるが、前提条件としてそのような変形せずに伝播する波動解の存在を仮定したらどうなるかという方向で以下の論議を進めて行くことにしよう。

3. Sand Waves 上の流れ : 図-1 のように座標軸をとり、河床形状は次のように sin 関数で

表示できるものとする。

$$Z = -\lambda_0 x + Z_0 \sin \theta \quad \dots (1)$$

ただし, $\theta = 2\pi(x - \omega t)/L \quad \dots (2)$

また同よりエネルギー水頭は(3)となる,

$$H = Z + h + \frac{u^2}{2g} \quad \dots (3)$$

したがってエネルギーこう配は

$$\lambda = -\frac{dH}{dx} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{dx}\right) \quad \dots (4)$$

となるが, 一般に時局的变化は緩慢で加速度項は省略し得るから, (3), (4)より

$$\lambda = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \quad \dots (5)$$

となる。一方加速度項を省略した水流の連続式は

$$h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \dots (6)$$

となり, これより次式を得る。

$$-\frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^2}{g h} \frac{\partial h}{\partial x} = F^2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots (7)$$

(1)より, $-\frac{\partial Z}{\partial x} = \lambda_0 - \frac{2\pi}{L} Z_0 \cos \theta \quad \dots (8)$

となる。(7), (8)を(5)へ代入すると次式を得る。

$$\lambda - \lambda_0 + \frac{2\pi}{L} Z_0 \cos \theta + (1 - F^2) \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots (9)$$

(9)式の解として h を次のようにおくことにする。

$$h = h_0 \{1 + \varepsilon_1 \sin(\theta - \alpha)\} \quad \dots (10)$$

抵抗則としてChazy式を用い, $R \equiv h$ とすると,

$$\lambda = \frac{u^2}{c^2 h} = \frac{g^2}{c^2 h^3} \quad \dots (11) \quad \text{また } g^2 = c^2 \lambda_0 h_0^3 \quad \dots (12)$$

(10)式より各点の水位の平均水位からの偏りは $h_0 \varepsilon_1$ のオーダーであることが分る。そこでクレスト上について考え, その水深を h_c とすると次のようになるから

$$h_c = h_0 - Z_0 - h_0 \varepsilon_1 = h_0(1 + \varepsilon_1) \quad |\varepsilon_1| = \frac{Z_0}{2h_0} \ll 1 \quad \dots (13)$$

であることが分る。この条件を用いて線型化する

$$\lambda = \frac{g^2}{c^2 h^3} = \lambda_0 \left(\frac{h_0}{h}\right)^3 = \lambda_0 \{1 - 3\varepsilon_1 \sin(\theta - \alpha)\} \quad \dots (14)$$

となる。同様にして次式を得る。

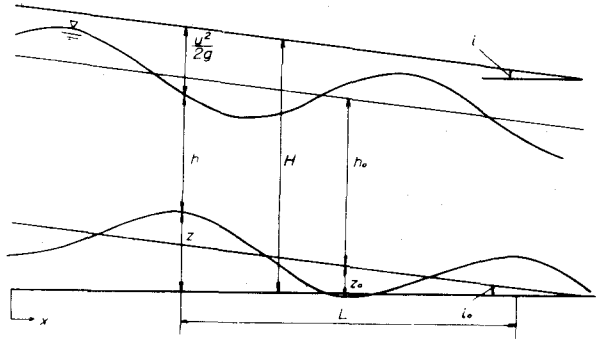


図-1. 記号説明図

$$F^2 = \frac{u^2}{gh} = F_0^2 \left(\frac{h_0}{h}\right)^3 = F_0^2 \{1 - 3\varepsilon_1 \sin(\theta - \alpha)\} \quad \dots (15)$$

ここで簡単のため $\varepsilon_1 = \frac{2\pi Z_0}{\lambda_0 L} \quad \dots (16)$

とおいて(14), (15)を(9)式に代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\lambda_0 \{3\varepsilon_1 \sin(\theta - \alpha) - \varepsilon_1 \cos \theta\}}{1 - F_0^2 \{1 - 3\varepsilon_1 \sin(\theta - \alpha)\}} \quad \dots (17)$$

一方(10)式より次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \lambda_0 \frac{h_0}{Z_0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(\theta - \alpha) \quad \dots (18)$$

(17), (18)式を等置して ε_2 の高次の項を省略すると,

$$\varepsilon_1 \cos \theta = \frac{h_0}{Z_0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 (F_0^2 - 1) \cos(\theta - \alpha) + 3\varepsilon_1 \sin(\theta - \alpha) \quad \dots (19)$$

(19)式の左辺を加法定理で展開すると,

$$\varepsilon_1 \cos \alpha \cos(\theta - \alpha) - \varepsilon_1 \sin \alpha \sin(\theta - \alpha) = \frac{h_0}{Z_0} (F_0^2 - 1) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(\theta - \alpha) + 3\varepsilon_1 \sin(\theta - \alpha) \quad \dots (20)$$

となる。上式の両辺を比較して次の2式を得る。

$$\varepsilon_1 \cos \alpha = \frac{h_0}{Z_0} (F_0^2 - 1) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad \dots (21)$$

$$\varepsilon_1 \sin \alpha = -3\varepsilon_2 \quad \dots (22)$$

両式より

$$\tan \alpha = \frac{3Z_0}{h_0(1 - F_0^2)\varepsilon_1} = \frac{3}{R} \quad \dots (23)$$

を得る。ここに $R = \frac{h_0}{Z_0} (1 - F_0^2) \varepsilon_1 = \frac{2\pi h_0}{\lambda_0 L} (1 - F_0^2) \quad \dots (24)$

である。また(21), (24)より次式を得る。

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{1}{R} \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{R^2 + 9}} \quad \dots (25)$$

したがって ε_2 は次のように求められる。

$$\varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{R^2 + 9}} = -\frac{2\pi Z_0}{\lambda_0 L \sqrt{R^2 + 9}} \quad \dots (26)$$

(23) 式より α は $F_0 < 1$ の場合には α 1
 α 3 象限に, また $F_0 > 1$ の場合には α 2
 α 4 象限にあることが分る。また (25) より ε_1 と ε_2 とは異符号であるから, これは

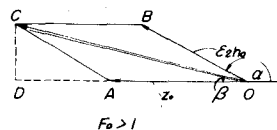
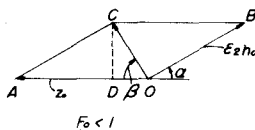


図-2. Sand wave と水面波の位相関係

Sand waves と水面波とは $\pi - \alpha$ だけ
 位相がずれていることを示している。これを図示
 したものが図-2 である。図中の記号の関係から

$$\tan \beta = \frac{3k}{9 - F_0^2(k^2 + 1)} \dots \dots \dots (27)$$

と求められる。この角 β が Sand wave と水面波
 の位相差を表すものである。図-2 および (23)
 (27) 式から次のことが分る。

$F_0 < 1$: $k \rightarrow +\infty, \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow \pi$

$F_0 > 1$: $k \rightarrow -\infty, \alpha \rightarrow \pi, \beta \rightarrow 0$

これは常流では位相差は π に近く, 射流ではそれ
 が 0 に近いことを示し, これまでの経験的事実と
 よく一致している。

4. Sand Waves の形状特性について :

(10), (14) および (13) の条件から u_x は次のよ
 うに求められる。

$$u_x = (g h_0 i)^{1/2} = u_{x0} \{ 1 - \varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha) \} \dots (28)$$

これを用いて流砂量式は最も簡単な形として

$$q_B = K z^m = q_{B0} \{ 1 - 2m \varepsilon_2 \sin(\theta - \alpha) \} \dots (29)$$

とする。流砂の連続式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial q_B}{\partial x} + (1 - \lambda) \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (30)$$

いま解としての河床形状を (1) のように仮定したこ
 とから次の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\omega \left(\frac{\partial z}{\partial x} + i_0 \right) \dots \dots \dots (31)$$

(30), (31) より次式を得る。

$$\frac{\partial q_B}{\partial x} = \omega (1 - \lambda) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + i_0 \right) \dots \dots \dots (32)$$

(29) より $\partial q_B / \partial x$ は次のように求められる。

$$\frac{\partial q_B}{\partial x} = -2m q_{B0} \frac{i_0}{z_0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(\theta - \alpha) \dots \dots (33)$$

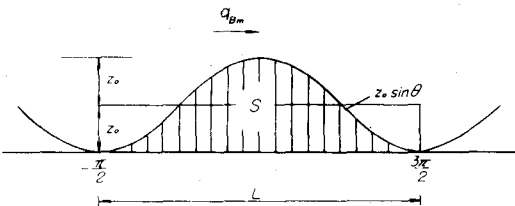


図-3. 記号説明図

ここで伝播速度 ω を求める必要がある。いま Sand
 wave 上を通る流砂は全てその伝播に寄与するも
 のと仮定し, 図-3 のように一波長だけ移動する
 時間内の平均流砂量を q_{Bm} , wave の面積を S の
 ように S とすると次の関係が得られる。

$$q_{Bm} \cdot \frac{L}{\omega} = (1 - \lambda) S = (1 - \lambda) z_0 L$$

$$\text{よって } \omega = \frac{q_{Bm}}{(1 - \lambda) z_0} \dots \dots \dots (34)$$

と求められる。(33), (34) を (32) に代入すると,

$$-2m q_{B0} \varepsilon_2 \cos(\theta - \alpha) = q_{Bm} \cos \theta \dots \dots (35)$$

となる。 F_0 が 1 のごく近傍を除いて一般に α はか
 なり大きく, したがって $\alpha \neq 0$ としても良いと
 思われる。また $q_{B0} \approx q_{Bm}$ と考えられるから
 (35) は次のように簡単になる。

$$-2m \varepsilon_2 = 1 \dots \dots \dots (36)$$

(36) に (26) を代入し, $2z_0 = H$ とすると,

$$\frac{H}{L} = \frac{1}{2m} \frac{i_0 \sqrt{k^2 + 1}}{\pi} \dots \dots \dots (37)$$

となる。このようにあらかじめ変形せずに伝播す
 る波動解の存在を仮定して出発した解析であるが
 , ε_2 または H/L が決定されるということはこの
 ような解の存在が可能であることを示すものと思
 われる。図-4 は (37) で $m=2$ とした場合の理論
 値と実測値とを比較したものである。途中多くの

仮定, 省略を行ない, また流砂量式として (29) 式のような簡単なものを用いたなど問題英が多く含まれているため, 英の散乱は著しいが, 傾向は示しているように思われる。

5. Sand Waves の移動特性について:

(34) と (37) 式から次式を得る。

$$\frac{\omega}{u_{*0}} = \frac{2m g_{00}}{(1-\lambda) \cdot g_{00} u_{*0} (1-F_0^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+9/4}} \dots (38)$$

上式より $F_0 < 1$ で ω : 正 (下流向)

$F_0 > 1$ で ω : 負 (上流向)

であることが分り, これも従来からの経験的事実とよく一致している。(38) 式において $m=2$ とし, $(1+9/4)^{1/2}$ も省略した計算値と実測の ω/u_{*0} とを比較したものが図-5 である。英の散乱は更に著しいが ω は局所的な条件に左右されて大きく変化し, その平均値の測定が困難なことを考えればこれも止むを得ないだろう。

6. むすび : 以上変形せずに伝播する波動解の存在を仮定することから出発してごく概略的な考察を行なつたが, その結果を要約すると次のようである。

i) 仮定したような解が何故存在し得るのかという根拠は明らかでないが, このような wave の存在する可能性はあるものと思われる。

ii) 解の形として $\sin$ 関数を行なったことが妥当で

あるが, また流砂量式として (29) のようなもので良いかなど多くの問題英を含んでいるため, 定量的には十分でないが, 定性的には多くの英でこれまでの経験的事実をよく説明できる。

iii) 今後は更に細部にわたって検討を加え, その根拠を明らかにすることも定量的な意味でもその精度を向上させて行く必要がある。

最後に本研究を行なうに際し終始御指導頂いた芦田和男教授に感謝の意を表することにも, 実測資料としては Dr. Simons and Richardson 英氏のものを使用させて頂いたことを付言しておく。

参考文献

1) たとえば 応用水理学, 中 I, p. 57.

2) J. F. Kennedy, The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, J. F. M., Vol. 16, Part 4.

