II－117　　水流による砂粒のsaltationの機構について

京都大学工学部　正会員　○土屋義人
大阪府土木部　正会員　渡戸健介

1. 緒言　流砂力学における基本的課題の1つは，水流中における砂粒の運動機構の究明であって，とくにいわゆる砂れきの掃流現象の解明にあたっては，床面近傍における砂粒の運動機構を明らかにする必要がある。本研究は掃流砂れきのsaltationの機構を明らかにするための基礎研究として，水流による単一砂粒のsaltationの機構について若干の理論的研究を試みたものであって，これまで種々の角度からこの問題をまとして実験的に解明しようとしてきたわれわれの実験結果への1つの力学的説明である。

2. Saltationのモデルおよび仮定　ここで対象とする砂粒のsaltationは，静止の状態におかれた砂粒が運動を開始し，それが転動および跳躍をくり返してゆく過程とする。この場合，静止から運動を開始してある距離までは転動し，適当な砂粒の速度がえられると床面の砂粒との衝突によって跳躍に移行するものと考える。一般に，掃流力が大きくなると転動距離は減少するが，砂粒の大きさ程度になると，もはや砂粒は転動ではなく，わずかな距離で加速し，ほとんど直ちに跳躍に移行するものと考える。一般に床面付近における砂粒の運動には，多かれすくなかれ水流の乱れが影響するものと考えられる。しかし，ここでは乱れの影響がほとんど省略しうるほど，砂粒は十分大きいと仮定するが，急激な加速運動で跳躍に移行する場合には，乱れの影響を考慮する取り扱いを示す。

3. 砂粒の転動機構　転動速度の $1/\alpha$ がスリップするとした転動の運動方程式は，近似的に

$$(\sigma/\rho+1/2)(\pi/6)d^3\rho\, dU/dt=-F+(1/8)\rho\pi d^2 C_D(u-U)^2,\quad I\,d\omega/dt=F(d/2),\quad \alpha U-(d/2)\omega=0 \qquad (1)$$

ここに，U：砂粒の転動速度，u：砂粒近傍の流速，d：砂粒の大きさ，σ/ρ：砂粒の比重，t：時間，I：砂粒の慣性モーメント，ω：砂粒の角速度，F：摩擦力，C_D：抵抗係数，である。

(1)式の解は，$U/u^*=A_r^2\tau/(1+A_r\tau)$，$U/u^*=A_r^2B\sqrt{(x/d)}/\{1+A_rB\sqrt{(x/d)}\}$，$B^2=C_D/A_r^2(2\sigma/\rho+1/3)$　(2)

ここに，u^*：摩擦速度，$A_r=u/u^*$，x：転動距離，$\tau=(3/4)(u^*t/d)C_D/[\{1+(2d/5)\}(\sigma/\rho)+1/2]$．図-1は上式において $\alpha=5$ として実験値と比較した結果であって，このほかの考察を加えて，砂粒のこの種の運動は回転を主体としたものであることがわかった。この転動の過程には，つぎに述べる跳躍の過程の集合であるとする考え方もあると思われるが，ここでは観察の結果に基づいて転動として考察した。

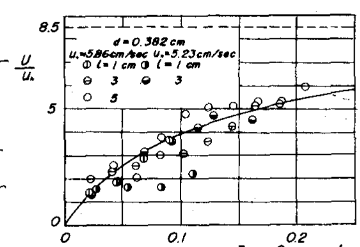


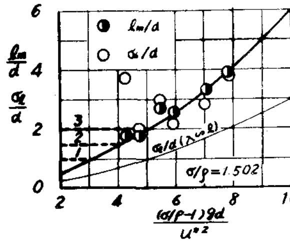
図-1　砂粒の転動速度の変化

砂粒が転動から跳躍に移行するための力学条件について考える。この条件は転動速度がある限界以上に達した場合であって，それは床面上に高さ Δ なる突起があって，それを滑べることなくのりこえる条件とすれば，(2)式の関係を用いて，転動距離の平均値 l_m はつぎのようにあらわされる。

$$l_m/d=\{(2\sigma/\rho+1/3)(14/45)(\rho/\sigma)(\Delta/d)/C_D[A_r\{1-(2/3)(\Delta/d)\}-\sqrt{(14/45)(\rho/\sigma)(\Delta/d)(\sigma/\rho-1)gd/u^{*2}}]\}(\sigma/\rho-1)gd/u^{*2} \qquad (3)$$

(3)式において $\Delta/d=0.96$ として実験値と比較したものが図-2である。ここで，$u^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd$ の値が大きくな

ると，l_m/dは急激に減少するが，$l_m/d\sim1\sim1.5$ 程度以下になる場合には，砂粒は床面との接触はほとんどなく，移動開始後直ちに，隣接の砂粒に衝突するものと考えられる．この場合の砂粒の運動は，(1)式において$F=0$とした式から，$U/u^*=\bar{u}\sqrt{2N(l_m/d)}/\{\sqrt{2N(l_m/d)}+1\}$ (4)
であらわされる。ここに，$\bar{u}=(u/u^*)$，$N=(3/4)C_D/(\sigma/\rho+1/2)$。

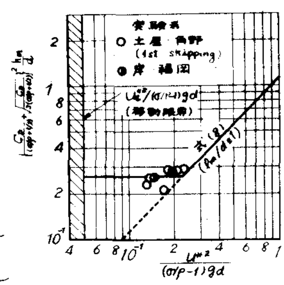


図－2 転動距離の特性

転動距離は床面の不均一性や転動速度の変動のために，ある分布をもつ．いま転動から跳躍に移行する過程を1つの確率過程とすれば，その移行確率が距離に対して一定な場合と距離に比例するとした場合の確率密度関数 $f_i(l/d)$ は，それぞれ

$$f_1(l/d)=\lambda\exp(-\lambda l/d),\quad f_2(l/d)=A(l/d)\exp\{-(A/2)(l/d)^2\} \qquad (5)$$

であらわされる。ここに，$\lambda=d/l_m$，$A=(\pi/2)(d/l_m)^2$．図－2中には(5)式による標準偏差$(\sigma_l/d)^2$の値も示してあるが，$l_m/d=\sigma_l/d$であることがわかり，移行確率は一定と仮定される．したがって，砂粒の転動から跳躍へ移行する速度の限界値は近似的に一定としてよいであろう．

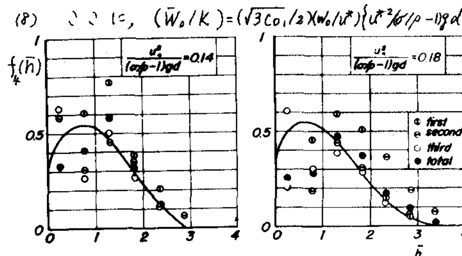


4．砂粒の跳躍機構　転動から跳躍に移行する限界の速度に比例した速度で床面の砂粒に衝突して跳躍を開始するものと考え，そのときの初期速度を鉛直および水平方向に対してそれぞれ U_0 および W_0 とする。砂粒の運動方程式は $dW/dt=\mp(3/4)C_{D1}W^2/(\sigma/\rho+1/2)d-(\sigma/\rho-1)g/(\sigma/\rho+1/2)$，$dU/dt=(3/4)C_{D2}(u-U)^2/(\sigma/\rho+1/2)d$ (6)

図-3 砂粒の跳躍高さ

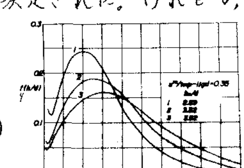
ここに，C_{D1} および C_{D2}：鉛直および水平方向に対する砂粒の抵抗係数，WおよびU：砂粒の速度成分。この式から砂粒の跳躍高さhを求めると，$h_m/d(=\bar{h}_m)=(4/3)\{(\sigma/\rho+1/2)/C_{D1}\}\log_e\sqrt{1+(\bar{W}_0/K)^2}$ (7)
であり，これは $\bar{h}_m\fallingdotseq(2/3)\{(\sigma/\rho+1/2)/C_{D1}\}(\bar{W}_0/K)^2$ (8)　ここに，$(\bar{W}_0/K)=(\sqrt{3C_{D1}}/2)(W_0/u^*)\{u^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd\}^{1/2}$

いま，上式中の(W_0/u^*)として，$(W_0/u^*)\equiv\beta(U_0/u^*)$と近似的にあらわすことにすれば，前述した$u^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd$の値の小さい範囲の(2)式が成立する場合には，$\bar{h}_m$は一定となる．$u^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd$の値が大きくなって$l_m/d\approx1\sim1.5$程度では，(4)式が成立するので，式中$l_m/d$の値を適当に仮定することにすれば，この範囲では$\bar{h}_m$は(7)または(8)式から$u^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd$の増加とともに増大することになる。図－3はこうして求められた跳躍高さの関係を示したものである．ただし，βの値は実験結果から0.9と決定された。けれども，l_m/dの値は$u^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd$の大きい範囲の実験値がないので決定できない．



図－4 砂粒の跳躍高さの分布特性 (1)

つぎに，跳躍高さの分布を考えるに，その密度関数を$f_4(h/d)$とすれば，一般に$f_i(l/d)d(l/d)=f_3(U_0/u^*)d(U_0/u^*)$ および $f_3(\beta U_0/u^*)d(\beta U_0/u^*)=f_4(h/d)d(h/d)$が成立するので，$u^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd$の値の小さい範囲($l_m/d>1\sim1.5$)に対して，$f_4(h/d)=(\lambda H^2/A_r^2B^2)\{1/(A_r-H\sqrt{\bar{h}})^3\}\exp\{-(\lambda H^2/A_r^2B^2)\bar{h}/(A_r-H\sqrt{\bar{h}})^2\}$ (9)


図－5 分布特性 (2)

ここに，$H^2=(3/2)(K^2/\beta^2)\{C_{D1}/(\sigma/\rho+1/2)\}$．図－4は(9)式と実験値と比較したものである。(4)式が成立する場合には，$\bar{u}$に対してGauss分布を仮定すれば，図-5のような分布特性が求められる。同様な計算は，第2，第3の跳躍に対しても簡単に進められ，単一砂粒の終局的なsaltationの特性を求めることができる。