

九州大学 工学部 正員 椿 東一郎

〃 〃 〃 〇平野 宗夫

1. 緒言

河床上を掃流される砂粒の移動速度は、それと単位面積上の移動の数が掃流砂量を与えろという点で基本的な問題であるだけでなく、流水中の砂粒の挙動を調べることによって砂粒に働らく流体力を推定評価する手掛りを与える。また最近、鉱山、製造工場、建設業などで、固体を流水によって運搬する水力輸送が利用されるようになってきており、この方面からも流水中の固体の移動速度が問題になってきている。これらの研究の第1歩として、我々は滑面水路における各種形状の固体の移動速度について実験を行ない、考察を試みた。

2. 実験装置および方法

幅40cm、長さ15mの可変勾配水路に水を流し、その中に各種形状の供試体を投入してその移動速度をストップウォッチで測定した。同時に、水深方向の流速分布と縦断方向の水面形をピトー管およびポイントゲージで測定した。また、供試体の水中での動摩擦係数を測定するために、15×20×400cmのアクリライト水槽を傾斜させて中に水を貯め、その中で供試体を滑動または転動させてその移動速度を測定した。実験に使用した供試体は表-1のとおりである。

3. 動摩擦係数と抗力係数

4) Sliding の場合

正六面体が静水中の斜面を滑り落ちる場合、供試体の移動速度を u_g 、水の抵抗力を D 、抗力係数を C_D 、揚力を L 、揚力係数を C_L 、供試体の水中重量を W' 、正六面体の辺長を a 、水および供試体の密度をそれぞれ ρ および ρ' 、供試体と斜面の間の摩擦力を F 、水中の動摩擦係数を μ' 、斜面の傾斜角を θ とすると、 $W' = (\rho' - \rho) g a^3$ 、 $D = \frac{\rho}{2} C_D a^2 u_g^2$ 、 $L = \frac{\rho}{2} C_L a^2 u_g^2$ 、 $F = \mu' (W' \cos \theta - L)$ である。定常状態における供試体の力の釣合い $W' \sin \theta = D + F$ より、次式

$$\frac{u_g^2}{(\rho' - \rho) g a \cos \theta} = \frac{2(\tan \theta - \mu')}{C_D - \mu' C_L} \quad \text{①}$$

を得る。 C_D 、 C_L および μ' は一定と考えらるので $u_g^2/(\rho' - \rho) g a \cos \theta$ は $\tan \theta$ の1次式になるはずである。そこで、実測値より $u_g^2/(\rho' - \rho) g a \cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めてプロットし、最小自乗法により μ' を求めると正六面体の鉄では $\mu' = 0.41$ 、ジュラルミンでは $\mu' = 0.39$ 、碎石では $\mu' = 0.38$ となる。また、この μ' の値を用いて式①の関係より各実験値における $C_D - \mu' C_L$ を計算すると、図-1, 2 のようになる。実はばらついていゝが平均すると正六面体で $C_D - \mu' C_L = 1.04$ となり、正六面体の抗力係数 $C_D = 1.05$ にほぼ一

表-1 供試体の諸元

形状	材質	比重	寸法
正六面体	鉄	7.86	3×3×3 ^{cm} , 2×2×2, 1×1×1
〃	ジュラルミン	2.70	同 上
直方体	鉄	7.86	2×2×1, 2×2×0.5
〃	ジュラルミン	2.70	同 上
球	鉄	7.86	直径 2.54, 1.90, 1.27, 0.79
〃	ガラス	2.50	直径 2.44, 1.64, 1.27
正石	石	2.40~2.75	nominal diameter 1.12~2.69
碎石	石	2.69~2.93	nominal diameter 1.28~2.78

* 岩波講座 基礎工学I, 流体力学1, 299

致する。碎石の平均値は $\mu' = 1.32$ で正六面体のそれよりやや大きい。

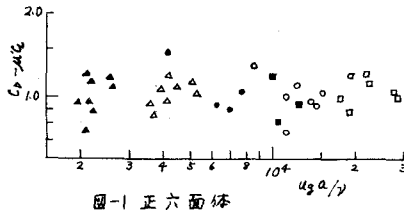


図-1 正六面体

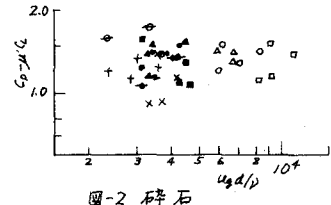


図-2 碎石

(2) Rolling の場合

供試体がこころがる場合には Magnus 効果が働らく。無限に長い円柱の Magnus 効果は $P\pi d^2 u_g^2$ であるから、球や玉石の Magnus 効果 M を補正係数 m を用いて表わすことにし、 $M = m P\pi d^2 u_g^2$ とする。定常状態における力の釣合いは $W \sin \theta = D + \mu'(W \cos \theta + M)$ であるから、球の移動速度は次式

$$\frac{u_g^2}{(\sigma_p - 1) g d \cos \theta} = \frac{4}{3} \frac{\tan \theta - \mu'}{C_D + 8\mu' m} \quad (2)$$

で表わされる。 C_D は $Re = u_g d / \nu$ によって変化するが、実験の範囲は $Re = 10^2 \sim 10^4$ 程度の C_D の変化の小さい領域であり、かつ、同一の球に対する Re の範囲は更に狭いから、同一の球に対しては式②右辺の分母の値は一定とみなしてよい。そこで実験値より $u_g^2 / (\sigma_p - 1) g d \cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めてプロットし、最小自乗法により μ' を求めると、球では $\mu' \approx 0.04$ 、玉石では $\mu' = 0.2 \sim 0.3$ となる。求めた μ' を用いて式②の関係から $C_D + 8\mu' m$ を逆算し、 $Re = u_g d / \nu$ に対してプロットすると図-3 のようになる。 $C_D + 8\mu' m$ の値は球、玉石とも Re によって変化している。球の場合、静水中を沈降する場合の C_D の値(図-3中の実線)よりやや大きい値となっているが、比重や粒径による差異は認められない。玉石の $C_D + 8\mu' m$ の値は球のそれより0.4程大きい。もし球の C_D と玉石の C_D が同じ値だとするとこの差は μ' の違いによるものとなり、 $m \approx 0.2$ となる。しかし、玉石の C_D は球のそれより大きいと考えられるから、 m の値は更に小さいものとなるであろう。従って、球に対する Magnus 効果の影響はかなり小さいものと思われる。

4. 流水中の固体の移動速度

(1) Sliding の場合

定常状態における力の釣合いは $D + W \sin \theta = \mu'(W \cos \theta - L)$ であるから、正六面体の移動速度 u_g は、固体に作用する代表流速を u として、

$$\frac{(u - u_g)^2}{(\sigma_p - 1) g d} = \frac{2(\mu' \cos \theta - \sin \theta)}{C_D + \mu' C_L} \quad (3)$$

となる。 u_g がちやうど0になるときの流速を u_c 、 $\rho'_c = u_c / u_{*c}$ 、 $\cos \theta = 1$ 、 $\sin \theta = 0$ とすると、

$$\frac{u_{*c}^2}{(\sigma_p - 1) g d} = \frac{2\mu'}{\rho_c'^2 (C_D + \mu' C_L)} \quad (4)$$

$\rho' = u / u_{*c}$ とし、 $\rho' \approx \rho'_c$ とすると、式③、④より

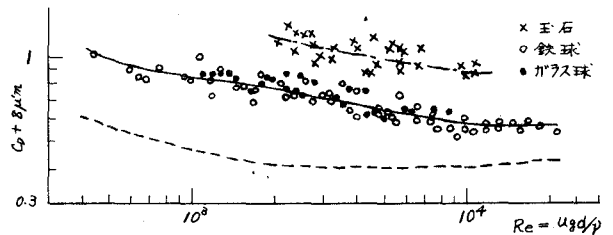


図-3 球および玉石

$$\frac{u_g}{u} = 1 - \frac{u_c}{u} = 1 - \sqrt{\psi_c/\psi} \quad \text{----- ⑤}$$

$$\text{ここに, } \psi = u_g^2/(\sigma/p-1)ga, \quad \psi_c = u_c^2/(\sigma/p-1)ga$$

u_g は一定と考えられるので u_g/u と $1/\sqrt{\psi}$ の間には直線関係が予想される。正六面体に対する実験値より u_g/u と $1/\sqrt{\psi}$ を求めてプロットすると図-4 のようになり、 $u_g/u < 0.5$ の範囲では実が $u_g/u = 1 - \sqrt{0.0021/\psi}$ の線のまわりにちらばるので、式⑤が成立しているとみてよい。また ψ_c の値は 0.0021 となるが、これは式④の右辺に実験より求めた数値を入れて計算した値と等しい。しかし、 u_g/u が 0.5 をこえると実験値は上記の直線より上にはずれ、式④が適用できなくなる。これは u_g が大きくなると供試体と水路床の間にうすい water film ができて摩擦抵抗が減少するためであると思われる。この

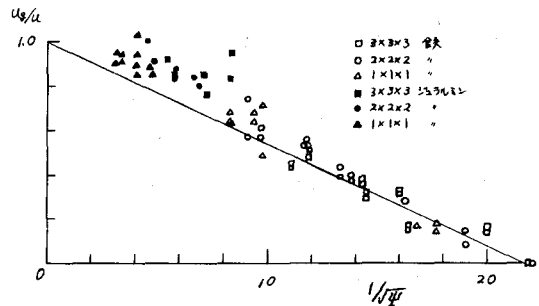
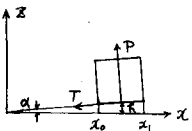


図-4 正六面体の移動速度



固定して考えると、供試体が静止し水路床が

$-u_g$ の速度で移動することになる。次に、

i) すき間は非常に小さいので Re 数は小さく慣性項は無視できる。ii) $u \gg v$, $u \gg w$, iii) すき間は平行に近いので $\partial u/\partial z \gg \partial u/\partial x$, と仮定すると、Navier-Stokes の方程式は簡単に $\partial^2 u/\partial z^2 = \mu \partial^2 u/\partial x^2$ となる。これを積分して境界条件 $z=0$ で $u=-u_g$, $z=b$ で $u=x_0$, $x=0$ および $x=x_1$ で $P=P_0$ を用いると、供試体の底面に働く圧力 P は

$$P = \frac{6\mu u_g a^3}{(n-1)^2 b_0^2} (\log n - 2 \frac{n-1}{n+1}) \quad \text{----- ⑥}$$

$$\text{ここに, } b_0 = \alpha x_0, \quad n = b_1/b_0 = x_1/x_0$$

また、底面に働く抵抗は $T = \mu(\partial u/\partial z)_{z=b}$ と積分して

$$T = \frac{P u_g a^2}{\alpha} (6 \frac{1-n}{1+n} - 2 \log n) \quad \text{----- ⑦}$$

x 方向および z 方向の力の釣り合いは $P \cos \alpha - W \cos \theta = 0$,

$T \cos \alpha + D = 0$ であるから、 $\cos \alpha = \cos \theta = 1$ として、

$$\frac{u_g}{u} = \frac{1}{1 + K \left\{ \frac{6\mu(1-n)ga}{u_g} \right\} \frac{1}{u}} \quad \text{----- ⑧}$$

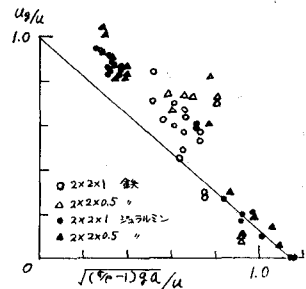


図-5 直方体の移動速度

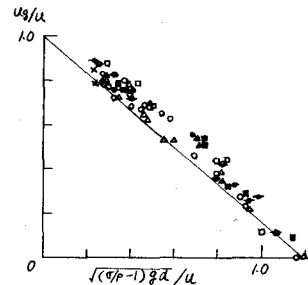


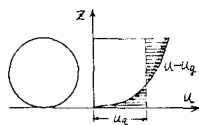
図-6 碎石の移動速度

$$K = \left[\frac{4}{C_0 \sqrt{6}} \frac{3 \frac{\pi}{4} + \log n}{\sqrt{\log n - 2 \frac{\pi}{4}}} \right]^{1/2}$$

上式において n の値が不明であるので式の函数形はさまたけられ
($\pi/4-1$) gd/u_g^2 をパラメータとして $u_g/u > 5$ の実験値を整理する
と図-7, 8 のようになる。

(2) Rolling の場合

流水の抵抗力 D , Magnus 効果 M , 揚力 L は u と u_g の大小に
より向きが異なる。また、流速は水深方向に変化するから球に作



用する相対速度 $u-u_g$ も変化する。一般に
は左図のように上部と下部で向きが逆にな
る。そこで、 D , M , L に対する代表

流速をそれぞれ u_D , u_M , u_L とし、 $D = \frac{\rho}{2} C_D \frac{\pi}{4} d^2 |u_D - u_g| (u_D - u_g)$,
 $M = m \rho \pi d^2 u_g (u_M - u_g)$, $L = \frac{\rho}{2} C_L \frac{\pi}{4} d^2 |u_L - u_g| (u_L - u_g)$ とすると、定
常状態での力の釣り合いより

$$\frac{u_D - u_g (u_D - u_g)}{(\pi/4-1)gd} = \frac{4}{3C_D} (M' \cos \theta - m \sin \theta) - \frac{m' C_L}{C_D} \frac{|u_L - u_g| (u_L - u_g)}{(\pi/4-1)gd} \\ - 8 \frac{m' m}{C_D} \frac{u_g (u_M - u_g)}{(\pi/4-1)gd}$$

u_D , u_M , u_L としてどの方向の流速をとればよいかは不明であるが、 $u_D = u$, $u_M = u_L = u$ とすると、

$u > u_g$ の場合

$$\frac{u_g}{u} = 1 - \sqrt{\frac{4}{3C_D} (M' \cos \theta - m \sin \theta) \frac{(\pi/4-1)gd}{u^2} - (1 - \frac{u_g}{u}) \left\{ \frac{m' C_L}{C_D} \left| 1 - \frac{u_g}{u} \right| + 8 \frac{m' m}{C_D} \frac{u_g}{u} \right\}} \quad (9)$$

となる。上式によると、 u_g/u は、 $L = M = 0$ の場合の値 $u_g/u = 1 - \sqrt{\frac{4}{3C_D} (M' \cos \theta - m \sin \theta) (\pi/4-1)gd/u^2}$ に較べて
右 $< u_g/u$ のとき小さく、左 $> u_g/u$ のとき大きい。これは $u_g/u = 1$ の境にして L, M の向きが変化し、右 $< u_g/u$
のとき下向き、 $u_g/u > 1$ のとき上向きになるためである。球と玉石の実験値より u_g/u と

$\sqrt{\frac{4}{3C_D} (M' \cos \theta - m \sin \theta) (\pi/4-1)gd/u^2}$ を求めてプロットすると図-9 のようになり、実験値は $u_g/u = 0.7 \sim 0.8$
の境にして $u_g/u = 1 - \sqrt{\frac{4}{3C_D} (M' \cos \theta - m \sin \theta) (\pi/4-1)gd/u^2}$ の線の上下に分れている。これより
右 $= 0.7 \sim 0.8$ と考えられよう。このところには問題があり、なお検討を要する。また、図-9 によらず
球と玉石との間に系統的な差は認め難い。

5. 結語

滑面水路における固体の移動速度

を想定するパラメータは

(1) 立方体の滑動する場合

u_g が小さいとき $u_g^2/(\pi/4-1)gd$ または $u_g^2/(\pi/4-1)gd$

u_g が大きいとき $(\pi/4-1)gd/u_g^2$

(2) 球や玉石が転動する場合

$\frac{4}{3C_D} (M' \cos \theta - m \sin \theta) (\pi/4-1)gd/u^2$

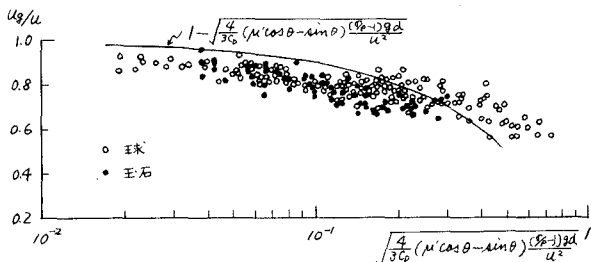


図-9 球および玉石の移動速度