

名古屋工業大学

正員 細井 正延

岐阜工業高等専門学校

正員 杉山 錦雄

運輸 省

正員 小沢 克之

1. はしがき 水制の主な機能は流速の減少および水制の働きと考えられる。主として後者の機能を有する水制は不透過非越流型水制である。この種の水制に対して、従来の研究では、流れが二次元ポテンシャル流れに従うと考へて、不^過流の研究には等角写像の方法によつて水制域を算出している。しかも、その流れのモデルとしては半無限領域における物体のまわりの流れを対象としている。しかしながら、水制域を決定するには、水路側壁による拘束の影響および水位変化の影響等を考慮せねばならないと考えられる。著者らは有限幅水路の側壁よりある角度で不透過非越流型水制を単独に取り付けた場合に、フルード数の比較的小さい流れに対し、実験的に流れの挙動を知り実際に適合するモデルを考へ等角写像を用いて水制域を考へようとするものである。水制域を定めるにあつて、水制上流側のはく離領域の形状・大きさを定めることが重要な要素となり、従つてその大きさを示す上流側のはく離角を求める一つの方法を試み、また、その形状については理論的説明が困難であるため、実験によつてこれを定めることにする。

2. 理論的考察 水路に水制を単独にだしたときの流れの最大の特徴は水路側壁から流れのはく離することである。このような急縮部のはく離領域は水制取付断面の上・下流側に形成される。そこで、実験によつて図-2(a),(b),(c)のようにモデル化し、有限水路に対する自由流線および水制域を考へる。なお、解析にあつて、流れは定常流、運動は非回転、摩擦および粘性を無視し、重力の影響を考へない二次元流れとして取扱ふことにし、図-2(a),(b),(c)のように水制の取付角度 α は流れに垂直な方向との傾きで上流側へ向つて(+), 下流側へ向つて(-)とする。

[A] はく離領域と流れのモデル化 はく離領域を理論的に解明するには境界層理論が有効であると考えられる。境界層のはく離領域を支配する無次元量入, または λ_0 は式(1)で示される。

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du}{dx} \quad \text{or} \quad \lambda_0 = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du}{dx} \quad \text{----- (1)}$$

こゝに、 δ :境界層の厚さ、 θ :運動量厚、 ν :動粘性係数。

u :境界層の外側の流速、 x :流れ方向の座標

z 平面(物理平面)、 Ω 平面(速度平面)、 t 平面(補助平面)、 w 平面(複素ポテンシャル面)とそれぞれ図-1(a),(b),(c),(d)のようにすれば、それらの間には式(2)、(3)の関係が成立する。

$$\Omega = -\frac{i}{2} \sec t + \frac{i}{2} \pi \quad \text{---- (2)} \quad \text{こゝに、} \Omega = \ln u_b / 8 + i\theta, \quad t: \text{速度平面}(=1/8 \cdot e^{i\theta})$$

$$w = \frac{1}{\pi} \ln \frac{-\alpha(t+1)}{t-\alpha} \quad \text{---- (3)} \quad u_b: \text{自由流線の流速}, w = \phi + i\psi$$

α は式(2)において、 $t = \alpha \cdot i$ で $\Omega = \ln u_b / 8$ より定められる。

$$\frac{B_1}{C} = \frac{u_b}{8} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{-2\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\alpha}{-2\alpha}} \quad \text{---- (4)} \quad \text{こゝに、} B_1: \text{水路幅}, C: \text{速度が} u_b \text{であるところの幅。}$$

ISに沿つて、 $-1 < \alpha < 0 < 1$ であるから、 $-\alpha(t+1)/(t-\alpha) > 0$ である。

また、 $w = \phi + i\psi$ であるから、式(3)より速度ポテンシャル ϕ_{zs} は式(5)で表わされる。

$$\phi_{zs} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{-\alpha(t+1)}{t-\alpha} \quad (t: \text{実数}) \quad \text{---- (5)}$$

次に、 $u = \partial\phi/\partial x$ であるから、ISに沿う流速は式(6)で与えられる。

$$u = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha + 1}{(t - \alpha)(t + \alpha)} \cdot \frac{dt}{dz} \text{ ----- (6)}$$

このとき、 $\theta = 0$ であるから式(2)より、 $\ln u_0/g = -\frac{i}{2} \sec^{-1} t + \frac{i}{2} \pi$ で、
 $u/u_0 = \eta$ とおくと、 $t = -\frac{2\eta^2}{\eta^2 + 1} \text{ ----- (7)}$

式(6)、式(7)より、 $dx/d\eta$ をつくり $x=0$ で $\eta=0$ より積分すると、

$$x = \frac{2}{\pi u_0} \left\{ \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} - \left(\frac{1}{2l} \ln \frac{l+\eta}{l-\eta} + \frac{1}{2m} \ln \frac{m+\eta}{m-\eta} \right) \right\} \text{ ----- (8)}$$

ただし、 $l = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}} / \sqrt{1 - \alpha}$ 、 $m = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}} / \sqrt{1 - \alpha}$

式(8)より、 $u/u_0 \sim x$ の関係が求まる。すなわち側壁 IS に沿う流速分布を知ることができる。そこで、式(8)の逆関数をも式(9)で定義する。

$$u = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \quad (a, b, c, d: \text{定数}) \text{ ----- (9)}$$

Pohlhausen は Kármán の運動量方程式を近似的に解き、はく離突は $\lambda = -12$ で与えられるとしている。しかし、これは圧力上昇の烈しい場合はよい結果を与えるが、圧力上昇の緩かな場合ははく離突を遅れ目に与える傾向がある。ここでは、Pohlhausen の方法を改良して与える岡本の $\lambda = -6.67$ 、または $\lambda_0 = -0.0888$ を用いると、はく離突は一応、式(10)のようになり、式(9)を式(10)に代入して x について解けばはく離突が求まることになる。
 $\lambda_0 = 0.4144 u^{-5} \frac{du}{dx} \int_0^x u^4 dx \text{ ----- (10)}$

上流側はく離領域の形状・大きさを解析的に解くことは困難であるので、実験によってこれを測定した。石原志方は上流側はく離領域を接近角定数 α を定義し、それと実験的に定の $\alpha = 0.4 \sim 0.5$ を得た。著者らは、水削角度を変化させてそれぞれの場合の流れの状況より推定して、次の二種類に分類した。すなわち、[I] $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$ の領域；[II] $\alpha < \alpha_2$ 、 $\alpha_1 < \alpha$ の領域、とした。ここに、 α は水削角度で $\alpha_1 = +15^\circ \sim +20^\circ$ 、 $\alpha_2 = -55^\circ \sim -60^\circ$ である。(3. 参照)

下流側はく離領域は、 α が上記 [I]、[II] の範囲に対して、それぞれ図-2(a)、図-2(b)(c)のようにモデル化してその形状および長さについて考察する。すなわち、水削先端部から自由流線を考え、下流側はく離領域(水削域)は自由流線上の各点から発達する混合領域の外縁で作られる包絡線と考える方法による。

[B] 自由流線の方程式 図-2(a)に示すモデルとする平面として自由流線の方程式も求める。ここで K K'、J J' は水路上・下流で一樣な流況を示すものとする。まず、式(11)で示す複素変数 z を用いる。

$$z = \frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{g} e^{i\theta} \text{ ----- (11)} \quad g: \text{合速度の絶対値}, \theta: \text{方向角度}$$

Ω 平面と $\Omega = \ln z$ で定義する。自由流線 OJ に沿っては、 g は一定であるから、 $g=1$ とすると、 Ω 平面は図-3 のようになる。 Ω 平面の内部をも平面の上半部に写像するため、Schwarz-Christoffel の公式より、 Ω と z の関係を求めると、図-4 に示すように対応させると式(12)を得る。

$$\frac{d\Omega}{dt} = A \frac{t-l}{(t-a)(t-b)\sqrt{t(t-1)}} = \frac{A_1}{(t-a)\sqrt{t(t-1)}} + \frac{A_2}{(t-b)\sqrt{t(t-1)}} \text{ ----- (12)}$$

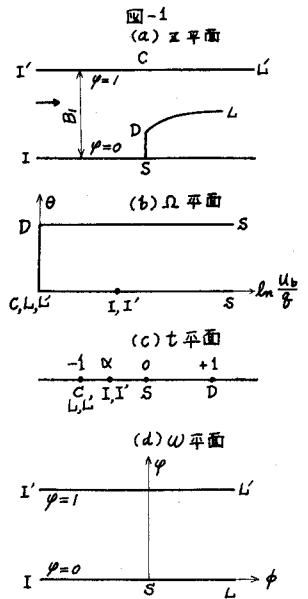
いま、A、B における外角をそれぞれ θ_a 、 θ_b としているから、 $A_1 = \frac{\theta_a}{\pi} \sqrt{a(a-1)}$ 、 $A_2 = \frac{\theta_b}{\pi} \sqrt{b(b-1)}$

J、J' で $\Omega = 0$ なる条件で式(12)を積分すると、次の写像関数をうる。

$$\Omega = \frac{2\theta_a}{\pi} \ln \frac{\sqrt{a(t-1)} + \sqrt{a(1-t)}}{\sqrt{t-a}} + \frac{2\theta_b}{\pi} \ln \frac{\sqrt{b(t-1)} + \sqrt{b(1-t)}}{\sqrt{t-b}} \text{ ----- (13)}$$

自由流線 OJ に沿っては $1 > t > 0$ であり、 $g=1$ としているから、

$$e^{i\theta} = \left(\frac{\sqrt{a(t-1)}}{\sqrt{a-t}} - i \frac{\sqrt{a(1-t)}}{\sqrt{a-t}} \right)^{\frac{2\theta_a}{\pi}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b(1-t)}}{\sqrt{b-t}} - i \frac{\sqrt{b(1-t)}}{\sqrt{b-t}} \right)^{\frac{2\theta_b}{\pi}} \text{ ----- (14)}$$



K, K'に沿っては, $-\infty < t < 0$, $\theta = 0$ であるから,

$$\frac{1}{g} = \left(\frac{\sqrt{a(t-1)} + \sqrt{(a-1)t}}{\sqrt{t-a}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b(t-1)} + \sqrt{(b-1)t}}{\sqrt{t-b}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \quad (15)$$

K, K' における流速を U_i とすると, このとき $t = \pm\infty$ であるから,

$$\frac{1}{U_i} = (\sqrt{a} + \sqrt{a-1})^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \cdot (\sqrt{b} + \sqrt{b-1})^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \quad (16)$$

つぎに, 複素ポテンシャル面: ω 平面を考えると, 図-5 のようになり Schwarz-Christoffel の変換式を用いると, ω 平面から t 平面への写像は式(17)のようになる。

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m}{\pi} \frac{t}{(t-k)t} \quad (17)$$

0 点を基準にして, 式(17)を積分し, $k = \infty$ とおき, さらに自由流線の 0 点からの長さを S とすれば, 自由流線上では $\varphi = 0$ といっているから, 式(18)をうる。

$$S = \phi = \omega = \frac{m}{\pi} \ln \frac{1}{t} \quad (18)$$

流れの J'J' における幅を C とすれば, そこでは $g=1$ であるので, $m=C$ となり, 連続の方程式より, $m = B_1 U_1$ がえられ, 従つて,

$$S = \phi = \omega = \frac{B_1 U_1}{\pi} \ln \frac{1}{t} \quad (19)$$

$\overline{AB}$ ($b < t < a$) に沿つて $\theta = \theta_0$ で, $\varphi = 0$ といっているから, 式(13)より,

$$\frac{1}{g} = \left(\frac{\sqrt{a(t-1)} + \sqrt{(a-1)t}}{\sqrt{a-t}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b(t-1)} + \sqrt{(b-1)t}}{\sqrt{b-t}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \quad (20)$$

となり, また, $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{g} \cos \theta_0 \quad (21)$

式(18)より, $d\phi/dt = -m/\pi t$ となるから,

$$dx = \frac{dx}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot dt = -\frac{m}{\pi} \left(\frac{\sqrt{a(t-1)} + \sqrt{(a-1)t}}{\sqrt{a-t}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b(t-1)} + \sqrt{(b-1)t}}{\sqrt{b-t}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \cos \theta_0 dt \quad (22)$$

式(22)を t について b から a まで積分すると, $x = -\overline{AB} \cos \theta_0$ であるから,

$$\frac{\overline{AB} \cdot \pi}{B_1 U_1} = \int_b^a \left(\frac{\sqrt{a(t-1)} + \sqrt{(a-1)t}}{\sqrt{a-t}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b(t-1)} + \sqrt{(b-1)t}}{\sqrt{b-t}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \frac{dt}{t} \quad (23)$$

同じようにして, $\overline{BO}$ に沿つて $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha = \theta_0 + \theta_2$ であり, $\varphi = 0$ といっているから,

$$\frac{\overline{BO} \cdot \pi}{B_1 U_1} = \int_1^b \left(\frac{\sqrt{a(t-1)} + \sqrt{(a-1)t}}{\sqrt{a-t}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b(t-1)} + \sqrt{(b-1)t}}{\sqrt{b-t}} \right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \frac{dt}{t} \quad (24)$$

式(14), 式(19)よりそれぞれ $dt/d\theta$, $d\phi/dt$ を作り, 式(21)より自由流線は

$$dx = \frac{dx}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} \cdot d\theta = -\frac{B_1 U_1}{\pi t} \cos \theta \frac{1}{f(t)} d\theta \quad (25)$$

同様にして, $dy = -\frac{B_1 U_1}{\pi t} \sin \theta \frac{1}{f(t)} d\theta \quad (26)$

$$f(t) = \frac{2\theta_0}{\pi} \frac{1}{2(a-t)} \sqrt{\frac{a(a-1)}{t(1-t)}} + \frac{2\theta_0}{\pi} \frac{1}{2(b-t)} \sqrt{\frac{b(b-1)}{t(1-t)}}$$

従つて, 長さ $\overline{AB}$, $\overline{OB}$ を与えれば, 式(16), 式(23)および式(24)より, a , b および U_1 が定まり, 式(14)で定まる t を式(25)および式(26)に代入すれば自由流線の座標が決定されることになる。

なお, 図-2(b)に対しては $b=0$, 図-2(c)に対しては $a=b$ としたときの Ω 平面, t 平面を用いて, 上記と同様にして自由流線が求まる。

[C] 水制限の長さ 自由流線上の各点から発達する混合領域については, 自由乱れの場合と同じように考え, 混合領域外縁の方程式は,

$$\frac{Y-y}{X-x} = \tan(\theta - \beta) \quad \beta: \text{拡大角} \quad (27)$$

図-2

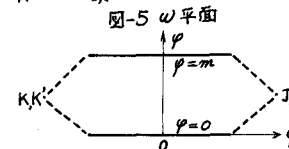
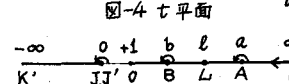
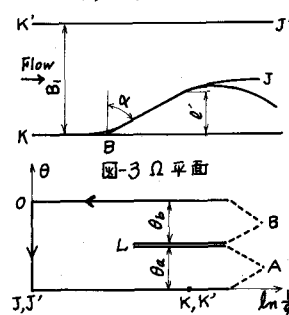
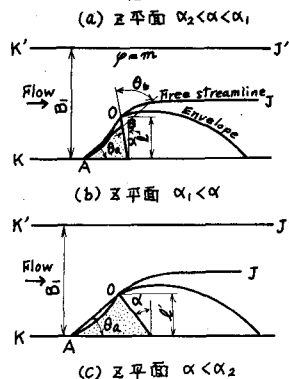
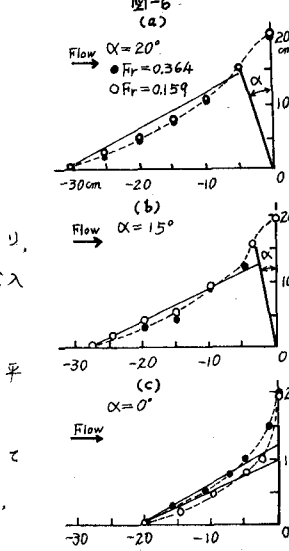


図-6

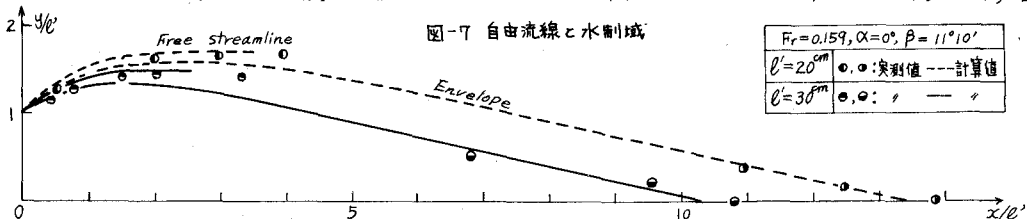
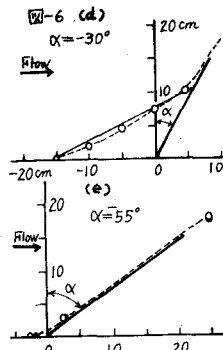


で与えられ、その包絡線は一定の γ にたいして、 $\frac{d\gamma}{d\theta}=0$ も満足する座標 (X,Y) として表わされ式(28)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X &= x + \cos(\theta - \beta) \left\{ \frac{dx}{d\theta} \sin(\theta - \beta) - \frac{dy}{d\theta} \cos(\theta - \beta) \right\} \\ Y &= y + \sin(\theta - \beta) \left\{ \frac{dx}{d\theta} \sin(\theta - \beta) - \frac{dy}{d\theta} \cos(\theta - \beta) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここに、 $\frac{dx}{d\theta}$ 、 $\frac{dy}{d\theta}$ はそれぞれ式(25)、式(26)によって与えられる。 β は Tollmien の噴流角度 $11^\circ 10'$ を使い、いま、原点は水刺先端であるので、 $Y = -l'$ となるとき X の値が水刺域の長さを与えることになる。 l' : 仮水刺長(3.参照)

3. 実験的考察 実験に使用した水路は幅 $B=70\text{cm}$ 、長さ 10m の長方形断面水路で、勾配は $1/1000$ である。実験はフルード数 0.159 、および 0.364 の二種類について行なった。水刺角度は上流側はく離領域の形状をモデル化するために、 $\alpha = +30^\circ \sim -60^\circ$ の範囲で行ない、急縮部の幅が水刺角度に關係なく $(B/15)\text{cm}$ に居るように水刺長を変えた。上流側はく離領域の形状を知るための測定方法は主として写真撮影によった。その代表的なものを図-6 に示した。図-6 によって明らかなように、水刺角度によって、 $[I] \alpha_2 < \alpha < \alpha_1$ の領域、 $[II] \alpha < \alpha_2$ 、 $\alpha_1 < \alpha$ の領域に分離し、大略、 $\alpha_1 = +15^\circ \sim 20^\circ$ 、 $\alpha_2 = -55^\circ \sim 60^\circ$ と推定される。従つて、 $[I]$ の範囲では、水刺の先端より内側で流れが直接あたる(図中の実線)のようにモデル化し、 $[II]$ の範囲では、 $\alpha_1 < \alpha$ のときは水刺先端に流れがあたる場合で $[I]$ の特別の場合に相当し、 $\alpha < \alpha_2$ のときは、水刺根元附近ではく離すると考え、図-2(a)(b)(c) に示すようにモデル化して考えることが妥当と思われる。また、フルード数の相違による上流側はく離領域の相違はほとんどみとめられない。このことは従来の研究においても指摘されている。上流側はく離を式(10)によつて計算した結果と実験値と比較すれば、計算値の方が実験値の約2倍程度上流側ではく離することになった。このことは乱流境界層として、はく離を求めることができればその差はさらに小さくなると思われる。入 θ の値とともに今後検討を要する。自由流線の測定も主に写真撮影によった。図-6によれば、自由流線は水刺先端から約 $4l=5\text{cm}$ だけ離れるようであり、この原因は水刺上下流の水位差による流れの慣性によるか、または流れに垂直な方向の流速分布の不均一性によるものと考えられる。従つて、水刺長としては $l' = l + 4l$ を仮水刺長として、 l' を用いて式(25)式(26)を計算した一例を図-7 に示す。下流側はく離領域の境界も Separation boundary として、種々の方法で測定を試みたが明確に知ることができず、従つて領域の長さの測定も主として行ない糸片によつて観測し、図-7 に式(28)を用いて計算した結果とともに示す。自由流線、水刺域の長さはともに計算値と実験値とが一致している。従来、直



角水刺の場合、水刺域の長さは水刺長の約14.5倍といわれているが、 $l=15\text{cm}$ 、 25cm ではそれぞれ約13.5倍、12.5倍で減少の傾向があらわれた。また、フルード数の相違による水刺域の変化はほとんどなかった。以上の考察は非越流型水刺についてであるが、水路断面縮小部の流れに対しても適用できるであろう。なお、この参考文献: 大草他「水刺に関する研究」工研研報107号、石原他「開水路の水理学的性状に関する研究」土木学会論文集342、中川・開水路分流的な水理・水理工学文庫における最近の進歩342、佐々木・等開水路の応用・富山県514、その水理力学等