

九州大学 工学部 水工土木教室 正員 上田年比古
九州産業大学工学部土木工学教室 正員 ○ 崎山 正常

1. まえがき 地表面下ある深さまでは淡水で飽和され、地下深層は塩水で飽和されているような海岸付近の地盤において、上層の淡水を集水溝、暗きよあるいは井戸などへ浸透させて取水すると浸塩境界面はGhyben-Herzbergの法則によって集水部の直下が最も高い山形状にもり上る。これがよりすぎると取水中に塩水が混入してきて使用できないこともありうるので、本報ではこのような地盤の上層淡水を二次元の溝へ浸透させて取水する場合に、下層の塩水が取水中に混入しない条件のもとで、できるだけ効果的な取水ができるように溝断面が取水量におよぼす影響および取水時の浸塩境界面の形状などについての理論解析の結果と数値計算および砂模型による実験によって検討した。なお、本報は昨年度の年次講演会発表にひきつらういて解析に

若干の改良を行ない、流れの場の諸量の影響について検討を加えたものである。

2. 解析 とり扱った流れの場は図-1に示してあるが、解析は次の仮定のもとに行なっている。すなわち、地盤は一様な透水性砂層であり、地表面は水平で一定水位の淡水で被われている。また下層塩水の流れは無視でき、淡水の浸透は溝に対して対称な二次元の定常流である。塩水が取水中に混入しない条件のもとで、できるだけ多量の淡水を取水するためには図-1に示すように取水によってもり上った浸塩境界面の最高部(0)が溝の底に到達した状態を保つような流れの場を形成させればよい。座標軸、各部の寸法、記号名などを図-1に示すようにとり、速度ポテンシャルを Φ 、流れの間数 ψ 、複素ポテンシャルを W 、 x および y の負方向の流速を u および v とすれば、二次元ポテンシャル流の基礎理論より

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, & v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ W &= \Phi + i\psi \end{aligned} \right\} \quad \dots (1)$$

次に、流れの場の任意点における圧力 p とし、地盤の透水係数を k とすれば Darcy の法則より

$$u = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} + y \right), \quad v = k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\gamma} + y \right) \quad \dots (2)$$

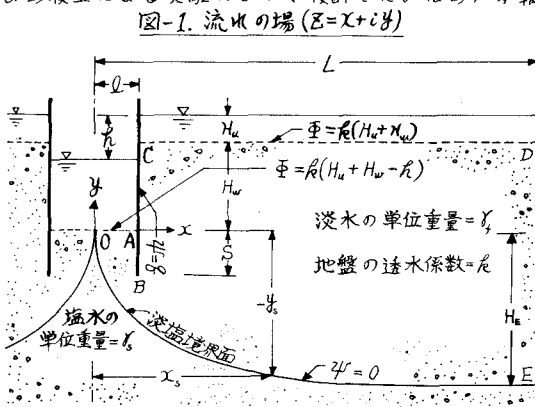


表-1. 境界条件

* 印を付したものは const.

境界	$Z = x + iy$		$W = \Phi + i\psi$		$\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$	
	x	y	Φ	ψ	Ω_1	Ω_2
OA	x	* 0	* $k(H_u + H_w - k)$	ψ	* $k(H_u + H_w - k)$	Ω_2
ABC	* L	y	Φ	* ψ	Ω_1	* $\psi - kL$
CD	x	* H_w	* $k(H_u + H_w)$	ψ	* $k(H_u + H_w + kL)$	Ω_2
DE	* L	y	Φ	* 0	Ω_1	* $-kL$
EO	x_s	y_s	Φ_s	* 0	* $k(H_u + H_w - k)$	* $-kLx_s$

図-2(A) $W = \Phi + i\psi$

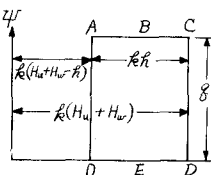


図-3(A) $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$

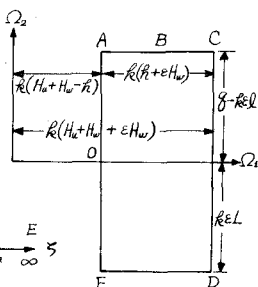


図-2(B) W 平面のための z 平面

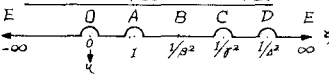
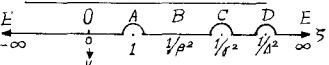


図-3(B) Ω 平面のための z 平面



(1)および(2)より

$$\Phi = R\left(\frac{P}{R} + Y\right) \quad \dots (3)$$

次に、浸塩境界面における諸量に添字 \$s\$ を付してあらわすと、まず、圧力 \$P_s\$ は

$$P_s = Y_s(H_u + H_w - R) - Y_s Y \quad \dots (4)$$

これを式(3)に代入すると浸塩境界面の速度ポテンシャル \$\Phi_s\$ は

$$\Phi_s = R(H_u + H_w - R) - R\epsilon Y_s \quad \dots (5)$$

$$\epsilon = (Y_s - Y) / Y_s \quad \dots (6)$$

であらわされる。上式(5)にヒントをえて Zhukovsky 関数化を行なうと

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \Phi + R\epsilon Y, & \Omega_2 &= 4Y - R\epsilon X \\ \Omega &= \Omega_1 + i\Omega_2 = W - iR\epsilon Z, & Z &= X + iY \end{aligned} \right\} \quad \dots (7)$$

なる解析関数 \$\Omega\$ がえられる。流れの場の \$Z, W\$ および \$\Omega\$ について境界条件を整理すると表-1 がえられる。これによって \$W\$ および \$\Omega\$ 平面を画けば図-2 (A) および図-3 (A) がえられ、これらの面上の特異点の値をも平面上では図-2 (B) および図-3 (B) のようにえらばう。そうすると \$W\$ および \$\Omega\$ 平面は Schwarz-Christoffel の定理により \$t\$ 平面を媒介平面として

$$W = -N \int \frac{dt}{\sqrt{(-t)\sqrt{(1-t)}\sqrt{(1/2-t)}\sqrt{(1/2-t)}}} \quad \dots (8)$$

$$\Omega = iM \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t)\sqrt{(1/2-t)}\sqrt{(1/2-t)}}} \quad \dots (9)$$

なる楕円積分で関係つけることができる。これらの平面上の特異点 \$B, C\$ および \$D\$ に対応する \$t\$ 平面の実軸上の値 \$1/2, 1/2\$ および \$1/2\$ と、式(8)および(9)の \$N\$ および \$M\$ の値は \$W\$ および \$\Omega\$ 平面の境界条件によって決定される定数であるが、\$N\$ および \$M\$ は式(8)および(9)の解析過程における無次元化によって消去できるので、基本的未知定数である \$\beta^2, \gamma^2\$ および \$d^2\$ の値を決定するための条件式のみをあげると次のようになる。すなわち、

$$\beta^2 = \gamma^2 \left\{ \left(1 + \epsilon \frac{H_w}{R}\right) \cdot \frac{K\left(\frac{R'}{R}\right)}{K\left(\frac{R'd}{R}\right)} \right\}^2 \quad \dots (10)$$

$$\epsilon \frac{L}{R} = \left(1 + \epsilon \frac{H_w}{R}\right) \left\{ \frac{K\left(\sqrt{\frac{R^2-d^2}{R^2d^2}}\right) - F\left(\sqrt{\frac{R^2-d^2}{R^2d^2}}, \Theta_0\right)}{K\left(\frac{R'd}{R}\right)} \right\} \quad \dots (11)$$

$$\epsilon \frac{S}{R} = \frac{F\left(\frac{R'}{R}, \Theta_0\right)}{K\left(\frac{R'}{R}\right)} - \left(1 + \epsilon \frac{H_w}{R}\right) \left\{ 1 - \frac{F\left(\frac{R'}{R}, \Theta_0\right)}{K\left(\frac{R'd}{R}\right)} \right\} \quad \dots (12)$$

$$\Theta_0 = \sin^{-1}(\delta), \quad \Theta_s = \sin^{-1}\left(\frac{\beta'}{\gamma'}\right), \quad \Theta_d = \sin^{-1} \frac{d'}{\beta' \sqrt{\frac{R^2-d^2}{R^2d^2}}}$$

であり、\$F\left(\frac{R'}{R}, \theta\right)\$ および \$K\left(\frac{R'}{R}\right)\$ などの関数記号は

\$\frac{R'}{R}\$ を母数とする第一種楕円積分および第一種完全楕円積分である。図-1 の流れの場において \$Y_s\$ および \$Y\$ を与えたと式(6)より \$\epsilon\$ が決まり、\$H_w, L, S\$ および \$R\$ を与えると条件式(10)~(12)における無次元量 \$\epsilon H_w/R, \epsilon L/R\$ および \$\epsilon S/R\$ が決まるから条件式(10)~(12)を連立に解けば基本的未知定数 \$\beta^2, \gamma^2\$ および \$d^2\$ の値が求められる。したがって図-1 に示すような流れの場の状態を保つために必要な溝幅に関する式

$$\epsilon \frac{L}{R} = \frac{K\left(\sqrt{\frac{R^2-d^2}{R^2d^2}}\right)}{K\left(\frac{R'}{R}\right)} - \left(1 + \epsilon \frac{H_w}{R}\right) \cdot \frac{F\left(\sqrt{\frac{R^2-d^2}{R^2d^2}}, \Theta_0\right)}{K\left(\frac{R'd}{R}\right)} \quad \dots (13)$$

から \$\epsilon L/R\$ の値がえられる。また、取水量 \$q\$ は透水係数 \$k\$ が既知ならば

$$\frac{q}{Rk} = \epsilon \frac{q}{Rk} = \frac{K\left(\sqrt{\frac{R^2-d^2}{R^2d^2}}\right)}{K\left(\frac{R'}{R}\right)} \quad \dots (14)$$

からえられる。次に、浸塩境界面の曲線式は

$$-\infty \leq S_s \leq 0$$

$$\sin \Theta_0 = \gamma \sqrt{\frac{1-S_s}{1-\gamma^2 S_s}}, \quad \sin \Theta_s = d' \sqrt{\frac{-S_s}{1-S_s}}$$

$$\epsilon \frac{X_s}{R} = \epsilon \frac{L}{R} - \left(1 + \epsilon \frac{H_w}{R}\right) \left\{ \frac{K\left(\sqrt{\frac{R^2-d^2}{R^2d^2}}\right) - F\left(\sqrt{\frac{R^2-d^2}{R^2d^2}}, \Theta_0\right)}{K\left(\frac{R'd}{R}\right)} \right\} \quad \dots (15)$$

$$\epsilon \frac{Y_s}{R} = - \frac{F\left(\frac{R'}{R}, \Theta_s\right)}{K\left(\frac{R'}{R}\right)}$$

がえられる。とくに、\$E\$ 点の \$Y_s\$ の値を \$Y_s = -H_w\$ とおくと

$$\epsilon \frac{H_w}{R} = F\left(\frac{R'}{R}, \Theta_E\right) / K\left(\frac{R'}{R}\right) \quad \text{ただし} \quad \Theta_E = \sin^{-1} d' \quad \dots (16)$$

次に、特別な場合として \$L\$ が \$H_w\$ および \$S\$ に比べて非常に大きいとき、すなわち、\$L\$ を無限大とみなしてさしつかえないような流れの場においては \$\Omega\$ 平面上で \$D\$ 点と \$E\$ 点は一致すると考えてさしつかえない。また、流線 \$DE\$ 間でのエネルギー損失は無視できることから \$E\$ 点の複素ポテンシャルは \$D\$ 点のそれにほとんど等しく、したがって \$t\$ 平面上で \$D\$ 点は限りなく \$E\$ 点に近づく。このことから

$1/2 \rightarrow \infty$ すなわち $\Delta^2 = 0$, $\Delta^2 = 1$ とすれば式(11)は不要

になり, 条件式(10)~(12)は

$$\beta^2 = \gamma^2 \left\{ \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{R} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot K(\gamma') \right\}^2 \quad \dots (17)$$

$$\varepsilon \frac{S}{R} = \frac{F(\gamma', \theta_0)}{K(\gamma')} - \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{R} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \tan^{-1}(\xi_0) \quad \dots (18)$$

$$\text{ただし } \xi_0 = \sqrt{\frac{\gamma^2 \beta^2}{\beta^2 - \gamma^2}}$$

となる。すなわち, この場合には与えられた $\varepsilon H_w/R$

および $\varepsilon S/R$ に対して式(17)および(18)を連立に解けば基本的未知定数 β^2 および γ^2 の値が求められる。

次に, 溝幅に関する式(13)は

$$\varepsilon \frac{L}{R} = \frac{K(\gamma)}{K(\gamma')} - \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{R} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \tanh^{-1}(\gamma) \quad \dots (19)$$

となり, 取水量 Q に対する式(14)は

$$\frac{Q}{R R} = \varepsilon \frac{(Q/R)}{R} = \frac{K(\gamma)}{K(\gamma')} \quad \dots (20)$$

となる。また, 浸塩境界面の曲線式(15)は

$$\left. \begin{aligned} -\infty \leq \xi_0 \leq 0 \\ \xi_0 = \gamma \sqrt{\frac{1 - \xi_0}{1 - \gamma^2 \xi_0}}, \quad \sin \theta_0 = \sqrt{\frac{-\xi_0}{1 - \xi_0}} \\ \varepsilon \frac{S}{R} = \varepsilon \frac{L}{R} - \frac{K(\gamma)}{K(\gamma')} + \left(1 + \varepsilon \frac{H_w}{R} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \tanh^{-1}(\gamma) \\ \varepsilon \frac{H_w}{R} = -F(\gamma', \theta_0)/K(\gamma') \end{aligned} \right\} \quad \dots (21)$$

となる。この場合の E 点の ξ_0 の値 $\xi_0 = -H_w$ に対して式

(21)の末式は

$$\varepsilon \frac{H_w}{R} = 1.0 \quad \dots (22)$$

となり, これは E 点における静水学的なつり合いをあらわしており, このことは解析結果の妥当性を示す一事項になる。

3. 数値計算および実験

以上の解析結果を検討するために流れの場の各部の寸法を種々に設定して, これに対する数値計算を行ない, 数種のものに対しては砂模型による実験を行なった。この結果の一部を図-4, 図-5および写真に示している。図-4について若干の考察を加えると

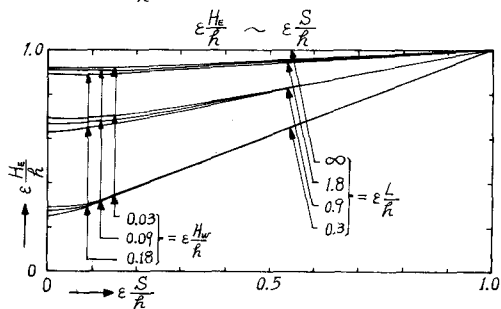
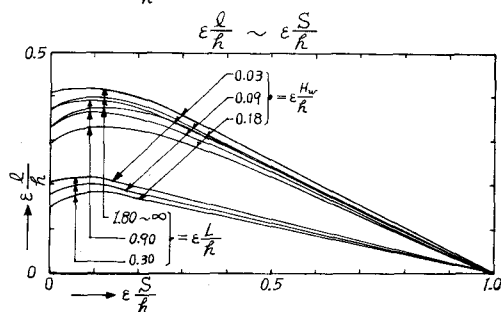
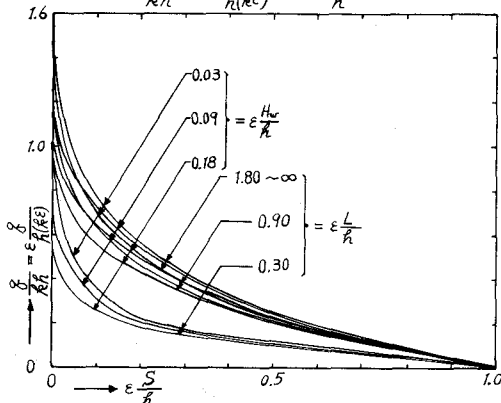
1). Q/R について

$\varepsilon H_w/R$ および $\varepsilon L/R$ を一定にすると $\varepsilon S/R$ が小さいところでは $\varepsilon S/R$ が大きくなると急激に小さくなる。

$\varepsilon H_w/R$ および $\varepsilon S/R$ を一定にすると $\varepsilon L/R$ が小さいところでは $\varepsilon L/R$ が大きくなると急激に大きくなるが $\varepsilon L/R$ がほぼ1.8をこえるとそれ以上大きくなってもほとんど

図-4. 数値計算結果

$$\frac{Q}{R R} = \varepsilon \frac{Q}{R(R)} \sim \varepsilon \frac{S}{R}$$



と変らな。すなわちほぼ $\varepsilon L/R > 1.8$ では $\varepsilon L/R \approx \infty$ とみなしても流量に対してはほとんどさしつかえない。また,

$\varepsilon L/R$ および $\varepsilon S/R$ を一定にすると $\varepsilon H_w/R$ が大きくなると徐々に小さくなる。

2). EL/R について

$\varepsilon H_w/R$ および $\varepsilon L/R$ を一定にするとほぼ $0 < \varepsilon S/R < 0.2$ ではほとんど変化しないが, $\varepsilon S/R \approx 0.1$ のところでは最大値をとり, ほぼ $\varepsilon S/R > 0.1$ のところでは $\varepsilon S/R$ が大きくなるにつれてほぼ直線的に小さくなる。

EH_w/R および ES/R を一定にすると EL/R が小さいところでは EL/R が大きくなると急激に大きくなるが EL/R がほぼ1.8をこすとそれ以上大きくなってもほとんど変わらない。すなわち、ほぼ $EL/R > 1.8$ のところでは EL/R を無限大とみなしても流れの場を保つ所要の溝幅にはほとんど影響はない。次に、 EL/R および ES/R を一定にすると EH_w/R が大きくなると徐々に小さくなる。

3). EH_w/R について
 EH_w/R および EL/R を一定にするとほぼ $0 < ES/R < 0.1$ では ES/R が大きくなってもほとんど大きくなりませんが、ほぼ $ES/R > 0.1$ では ES/R が大きくなると、ほぼ直線的に大きくなる。

EH_w/R および ES/R を一定にすると EL/R が小さいところでは急激に大きくなるが、ほぼ $EL/R > 1.8$ のところでは EL/R が大きくなってもほとんど大きくなりません。

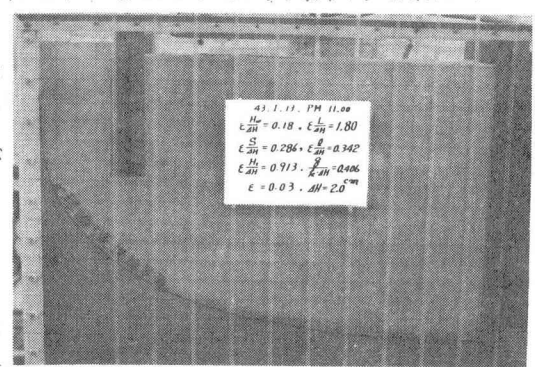
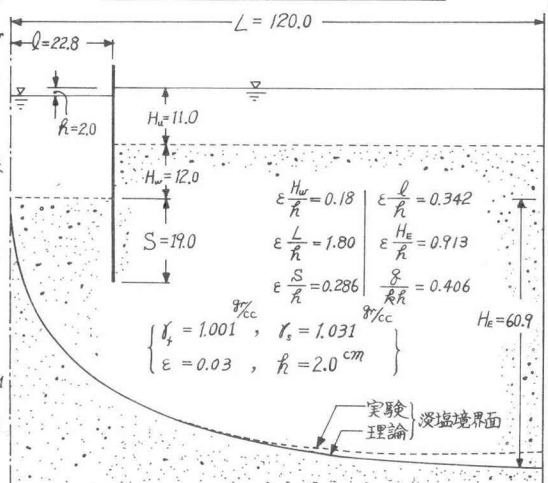
EL/R および ES/R を一定にすると EH_w/R が大きくなると若干小さくなる。

以上、図-4の結果は妥当な結果であるが、さらに図-5には数種の模型断面について行なった砂模型による実験結果のうちの一例を示している。これによると、浸塩境界面の曲線は理論曲線と実験曲線とがほぼ一致しており、なお、式(14)に実測の δ と R を適用して逆算した透水係数 k の値が各実験の場合ともほぼ一定値(実験に用いた相馬砂に対して $k \approx 0.35 \text{ cm/sec}$)となることから理論が妥当であることがわかる。写真は図-5の実験に対するもので、過マンガニ酸カリウムの溶液で着色された下層塩水部分と無色の上層淡水部分の明暗の差で浸塩境界面の曲線は理論と実験とがほぼ一致していることが認められよう。

4. むすび

以上、本解析の結果えられた理論値を砂模型による実験値と照合して理論の妥当性と裏付けることができたが、流れの場の EH_w/R 、 EL/R および

図-5. 模型実験(寸法単位... cm)



ES/R の値が与えられたとき、これらに対する基本的未知定数 β^2 、 δ^2 および k^2 の決定にはその過程に若干の試算をともない、やや、めんどうである。しかし、所要の第一種楕円積分の関数表さしととのへておけば EH_w/R 、 EL/R および ES/R のある一組が与えられたとき、これに対する一連の数値計算は手計算による場合でも数時間程度でえられるのでさほど困難ではない。海岸付近の都市において飲料水あるいは工業用水の不足が頻発しているときに、本報が海岸付近の地下淡水の利用計画に対して資料の一端にでも加えられるなら幸いである。最後に本研究を手伝ってもらった和山達二(山口県土木部)、井上芳明(大分県土木部)、藤好紘一郎(大阪府建設部)の三氏に感謝申上げる。なお、本研究には九州産業大学特別研究費の援助をうけた。併記して謝意を表する。