II－102　# 密度勾配を持つ流体中の波について

東京工業大学工学部　正会員　椎貝博美
東京工業大学大学院　学生員○沢本正樹

1．概説

密度勾配を有する流体中の波動現象は，気象学，海洋学などの面では，温度躍層がある場合の内部波として以前から関心を持たれていた。土木の分野でも近年のように河口湖の計画が云々されるようになると，湖内の淡塩水の混合を知るうえで，成層流体中での波動運動を明らかにする必要があるように思われる。

密度勾配がある場合の表面波については，Lamb[1]もふれている。この論文では，Lamb の結果について考察し，実験によりその傾向を確かめた。

2．理論的考察

密度分布が連続である場合の波動方程式は，ある程度短い時間（例えば波の周期）について平均された密度をρ_0とすると，流関数を用いて，次のように表わすことができる。[2]

$$(\rho_{0y}\psi_{ty}+\rho_0\Delta\psi_t)_t-g\rho_{0y}\psi_{xx}=0 \qquad (1)$$

ただし，Δはラプラシアン，t，x，y の添字は夫々，t，x，y に関する偏微分を表わす。又，水面では，$Dp/Dt=0$という条件から，

$$\psi_{tyy}=g\psi_{xx} \qquad (2)$$

がえられる。今，$\beta=-\rho_{0y}/\rho_0$：一定，$\psi\propto e^{i(kx-\sigma t)}$ と仮定し，水面形を$\eta=a\,e^{i(kx-\sigma t)}$ で与えると，(1)式，(2)式の解は次のようになる。ただし，$2\pi/k$：波長，$2\pi/\sigma$：周期，a：半波高，h：水深。

$$\left.\begin{aligned}\psi&=-a\frac{\sigma}{k}\frac{e^{\frac{\beta}{2}y}}{e^{\frac{\beta}{2}h}}\frac{\sinh\xi y}{\sinh\xi h}e^{i(kx-\sigma t)}\\ \sigma^2&=gk^2/\left(\frac{\beta}{2}+\xi\coth\xi h\right)\\ \text{ここに，}\ \xi^2&=\frac{\beta^2}{4}-\frac{g\beta}{\sigma^2}k^2+k^2\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

上式で$\beta=0$とおくと$\xi=k$となり，密度一様の場合の解と一致する。$\beta>0$であると，ξは，$\frac{\beta^2}{4}-\frac{g\beta}{\sigma^2}k^2+k^2\gtrless0$ によって実にも虚にもなりうる。ξが実の場合には(3)式がそのまま つかえ，あまりおもしろくない。今，ξが虚の場合について考える。すると，(3)式は，

$$\psi=-a\frac{\sigma}{k}\frac{e^{\frac{\beta}{2}y}}{e^{\frac{\beta}{2}h}}\frac{\sin\zeta y}{\sin\zeta h}e^{i(kx-\sigma t)} \qquad (4\text{-}1)$$

$$\sigma^2=gk^2/\left(\frac{\beta}{2}+\zeta\cot\zeta h\right) \qquad (4\text{-}2)$$

$$\text{ここに，}\ \zeta^2=-\left(\frac{\beta^2}{4}-\frac{g\beta}{\sigma^2}k^2+k^2\right)>0 \qquad (4\text{-}3)$$

となる。(4-2)，(4-3)を満足するζは，k又はσが与えられても，$\cot \zeta h$が周期関数であるために，一義的には定まらない。すなわちζは$n\pi/h$ではないが$n\pi/h$に非常に近い値をとり，正整数n一個に対し，一個の値をとる。このようにζは与えられたk又はσに対し無数に存在する。これらのうち$n=0$に対応するζの場合には，$\sin \zeta y$は0から$\sin \zeta h$まで一様に増加するから流関数ψも，底から水面まで一様に増加する。しかし$n>0$の場合には，$\psi=0$なる面が，底の他にn個存在する。そして$\psi=0$なる面のほぼ中間に，夫々一個ずつ振幅が極大になる面が存在する。今，$n=4$の場合を図に示すと，図-1のようになる。

このように内部にあらわれる波面の振幅は，水面での波高の数倍ないし数百倍に達する。であるから，これらの波は表面波というよりもむしろ，密度勾配が連続である場合の内部波ともいえるものである。実際に海洋で観測されている内部波[3]は，βが一定ではないが，大体は(4)式があてはまるのではないだろうか。

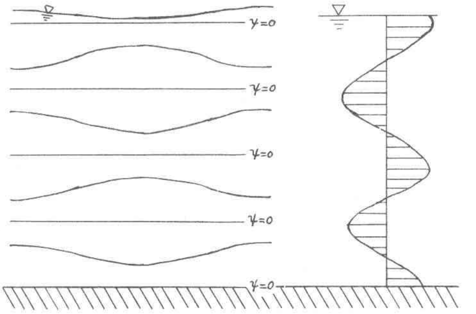

図1　$n=4$の場合の波面と水平流速uの分布形。

3．実験について

実験室において，塩分で密度勾配をつくり，周期1~3秒の波を与えると，周期が数十秒ないし数分で数種のnに相当する内部波が誘起されているのが観察できた。その水平速度の分布形は，(4)式より求めた次の式と大体一致する。

$$u = a\frac{\sigma}{k}\frac{e^{\frac{\beta}{2}y}}{e^{\frac{\beta}{2}h}}\frac{\frac{\beta}{2}\sin\zeta y+\zeta\cos\zeta y}{\sin\zeta h}e^{i(kx-\sigma t)} \qquad (5)$$

これらの波については次のようなことがいえる。
i) 表面波を与えてから数分後にできはじめる。
ii) 時間がたつにつれ，大きなnの値に相当する波があらわれる。iii) 周期は表面波にくらべて，かなり長い。iv) 波長も表面波にくらべかなり大きい。v) 造波装置を停止した後も，かなり長い間，停止しない。vi) 振幅，周期，波長が，表面波とどのような関係があるかはわからない。

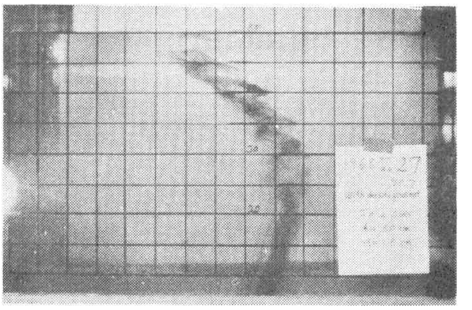

写真1　$n=2$の場合のuの分布形。

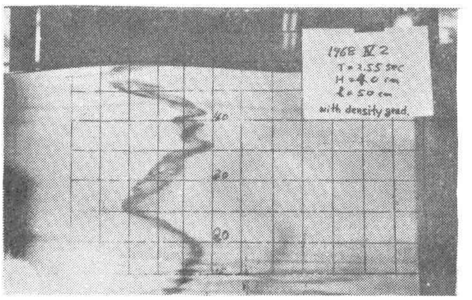

写真2　$n=4$の場合のuの分布形。

4．参考文献

1) Lamb, H : Hydrodynamics 6th ed. P.378
2) 椎貝、河野：「波による塩淡水の混合」第12回水理講演会講演集．1968
3) Ufford, C.W. : "Internal Waves Measured at Three Stations" Trans. Amer. Geophy. U. 1947 Vol.28