

九州大学工学部 正員 栗谷陽一

九州大学工学部 正員 古本勝弘

九州大学大学院 学生員 ○島田 晋

§1. まえがき 潮汐の作用による周期的流れを受ける河川感潮部での水理現象は、複雑ではあるが非常に興味深い問題が多い。この研究は、河川感潮部における乱流拡散現象を解明しようとしたものである。乱流拡散の理論として、パイプ内定常流について、Taylor¹⁾は、質量輸送と運動量輸送との Similarity を仮定し、断面の流速分布と管径方向の濃度分布から、管軸方向の拡散係数を与える式を導いている。Hasleman²⁾は、Taylor の立てた理論を開水路に応用し、潮汐の周期流れを受ける河口部での汚濁物質の拡散について、拡散係数を求めている。また、Bowden³⁾は、往復動の場合の拡散係数を与えているが、往復動が拡散現象に及ぼす影響については、あまり考慮していないようである。これらの理論は実測値ともよく合うことが報告されているが、パイプ内における周期的に向きを変える流れでの乱流拡散を考える場合には、上記の理論では十分ではないだろうと考えられる。周期的流れが拡散現象に及ぼす影響には、流速分布に比較して大きな濃度分布の遅れ(緩和時間)による Transient な拡散現象や、往復動による乱れの発生等が考えられる。本報告では、Taylor の定常流の理論に、濃度分布形成に対する遅れを考慮し、近似計算を行って、実験的に検討を加えた。

§2. 基礎式の誘導 Taylor による円管内の定常一様流の場合における拡散理論を、流向を周期的に変化する非定常な拡散現象にまで拡張して基礎式を導出する。円形パイプ内において、管の軸方向に z 、管径方向に r をそれぞれとり、管内の流速分布を、

universal な分布と仮定して、

$$\frac{U - U(z)}{u_*} = f(z) \quad (1)$$

ここに、 $U(z)$: z 方向の流速、 U : 断面での平均流速、

$z = r/a$, a : 管の半径、 u_* : 摩擦速度、

と置く。非定常な流速分布の緩和時間は、濃度分布の緩和時間に比べて小さいものとして無視し、流速分布は一様流の場合と同じものとして、以下近似計算を行った。

また、Reynolds の Similarity を仮定すれば、拡散係数 K は、

$$K = \frac{z}{\rho \frac{\partial u}{\partial r}} \approx \frac{m}{\rho \frac{\partial c}{\partial r}} \quad (2)$$

円管に対して

$$K = \frac{a z |u_*|}{\frac{df(z)}{dz}} \quad (3)$$

(2), (3) において z : 流体のせん断応力、 ρ : 流体の密度

m : 管径方向の物質輸送量、 c : 物質の濃度

軸対称性から、拡散方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + u \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial r} \left(K r \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad (4)$$

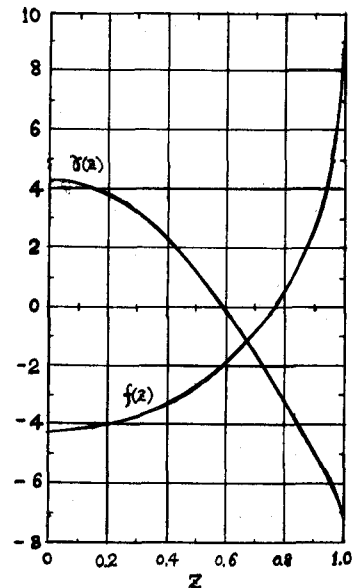


図-1. $f(z)$, $F(z)$

(4)に(1),(3)を代入して書き直せば、

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (U - u_* f(z)) \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{u_*}{a} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^2}{f(z)} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (5)$$

ここで、

$$C(x, z, t) = C_0(x, t) + C_1(x, t) \cdot \delta(z) \quad (6)$$

$$\delta(z) = \int_0^z \frac{1}{z^2} \frac{df(z)}{dz} \int_0^z f(z) z dz + \delta_0, \quad z \int_0^1 \delta(z) z dz = 0 \quad (7)$$

とあくと、(5)は、

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} + \delta(z) \frac{\partial C_1}{\partial z} = - (U - u_* f(z)) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x} + \delta(z) \frac{\partial C_1}{\partial x} \right) + \frac{|u_*|}{a} C_1 f(z) \quad (8)$$

(8)に z をかけて、断面で積分すれば、

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = -U \frac{\partial C_0}{\partial x} + \delta u_* \frac{\partial C_1}{\partial x} \quad (9)$$

ここに、

$$\delta = \int_0^1 f(z) \delta(z) z dz \quad [= -10.06] \quad (10)$$

次に(8)に $z f(z)$ あるいは $z \delta(z)$ をかけて断面で積分し、簡単のため $2 \int_0^1 f(z) \delta(z) z dz$ あるいは $2 \int_0^1 f(z) \delta(z) z dz$ を微小量として省略すると、

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -U \frac{\partial C_1}{\partial x} - \lambda \left(u_* \frac{\partial C_0}{\partial x} + |u_*| \frac{C_1}{a} \right) \quad (11)$$

$$\text{ここに } \lambda = -\frac{2}{\delta} \int_0^1 f^2(z) z dz, \text{ または } \lambda = -\delta \left(2 \int_0^1 f^2(z) z dz \right)^{-1} [= 0.784] \quad (12)$$

(9),(11)において、 $\frac{\partial C_0}{\partial x} = \alpha = \text{const.}$ C_1 が x によらず($\frac{\partial C_1}{\partial x} = 0$)、 $U = U_0 \cos \omega t$ 、 $u_* = U \cdot \phi$ とすれば、(9)より、

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = -\alpha U_0 \cos \omega t$$

$$\therefore C_0 = C_{00} + \alpha x - \frac{\alpha}{\omega} U_0 \sin \omega t. \quad (C_{00} \text{は定数}) \quad (13)$$

(11)は、

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -\lambda \left(\alpha U_0 \phi \cos \omega t + \frac{U \phi}{a} |\cos \omega t| C_1 \right) \quad (14)$$

ここで近似的に、

$$C_1 = C_{10} + C_{11} \cos \omega t + C_{12} \sin \omega t \quad (15)$$

とあき、一周期の積分値に対し(14)を満足するように係数を決めると、

$$C_{10} = 0 \quad (16)$$

$$C_{11} = -\frac{3\pi a \omega \cdot 4\lambda U_0 \phi^2}{9\pi^2 a^2 \omega^2 + 32\lambda^2 U_0^2 \phi^2} \frac{\alpha}{4\omega} \quad (17)$$

$$C_{12} = -\frac{(3\pi a \omega)^2 \cdot 4\lambda U_0 \phi}{9\pi^2 a^2 \omega^2 + 32\lambda^2 U_0^2 \phi^2} \frac{\alpha}{4\omega} \quad (18)$$

(15)に(16),(17),(18)を代入すると、

$$C_1 = -\frac{3\pi a \omega \cdot 4\lambda U_0 \phi}{9\pi^2 a^2 \omega^2 + 32\lambda^2 U_0^2 \phi^2} \frac{\alpha}{4\omega} (4\lambda U_0 \phi \cos \omega t + 3\pi a \omega \sin \omega t) \quad (19)$$

(6)に(13),(19)を代入すると

$$C = C_{00} + \alpha x - \frac{\alpha}{\omega} U_0 \sin \omega t - \frac{3\pi a \omega \cdot 4\lambda U_0 \phi}{9\pi^2 a^2 \omega^2 + 32\lambda^2 U_0^2 \phi^2} \frac{\alpha}{4\omega} (4\lambda U_0 \phi \cos \omega t + 3\pi a \omega \sin \omega t) \delta(z) \quad (20)$$

断面を通して輸送される物質量 Q は、

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^1 C \cdot u_* f(z) z dz \\ = \pi a^2 \frac{3\pi a \omega \cdot 4\lambda U_0 \phi}{9\pi^2 a^2 \omega^2 + 32\lambda^2 U_0^2 \phi^2} \frac{\alpha}{4\omega} (4\lambda U_0 \phi \cos \omega t + 3\pi a \omega \sin \omega t) U_0 \phi \cos \omega t \cdot 2 \int_0^1 f(z) \delta(z) z dz \quad (21)$$

一周期に対する Q の平均 $\bar{Q}$ は、

$$\bar{Q} = \pi a^2 \frac{6\pi a \delta \lambda^2 U_0^3 \phi^3}{9\pi^2 a^2 \omega^2 + 32\lambda^2 U_0^2 \phi^2} \alpha \quad (22)$$

したがって、拡散係数 K と ω との関係を次式で与えることができる。

$$K = -\frac{6\pi a \delta \lambda^2 U_0^3 \phi^3}{9\pi^2 a^2 \omega^2 + 32\lambda^2 U_0^2 \phi^2} \quad (23)$$

なお、(23)において、 $\omega = 0$ のときの拡散係数を K_0 とすると、

$$K_s = \frac{3\pi^2}{16} \delta \cdot a \cdot U_{*max} \quad (24)$$

となり、一様流に対する拡散係数となる。 U_* の平均値を $U_{*mean} = \frac{2}{\pi} U_{*max}$ とすれば、

$$K_s = \frac{3\pi^2}{32} \delta \cdot a \cdot U_{*mean} = 0.925 \delta \cdot a \cdot U_{*mean} \quad (24')$$

となり、前述の近似計算の誤差は、約1割と考えられる。 $Re = \frac{2a \cdot \frac{3}{2} U_0}{\nu}$ と拡散係数との関係を、Taylor の与えている $\phi(Re)$ の値を用いて計算し、図-4 に破線で示している。そして、ストロークの変化に対する K と K_s との比を 図-5 に示している。

§3. 実験装置と実験方法 実験装置の概略を 図-2 に示す。任意の回転数に制御できる直流モーターの回転をピストンに伝え、長さ3m、内径10mmのアクリライト製の円形パイプ内に周期的流れを起し、ストロークと回転数を変化させて、任意のレイノルズ数の流れを得ることかできるようにしている。トレーサーとしての拡散物質には、アルコールを混ぜて比重を水と同じにした塩水を用いた。そして、50 μ 白金線電極を4本、流れを横切って設置し、4電極法を用いて電気伝導度の変化をオシログラフに記録させた。塩水の注入は、電極から10cm間隔に開けている孔の1つより、注射器を用いて行い、ピストンを一番奥に静止させて小量を注入し、後にピストンの運動を開始している。

トレーサー瞬間注入の場合、一次元拡散方程式の解は次式で与えられる。

$$C = M t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (25)$$

ここに M : トレーサー注入量により決まる定数

x : 周期的な断面平均流速とともに移動する座標から見たときのトレーサー中心からの距離。

電極の設置点における濃度変化は、図-3 に示すように、ペンオシロで記録されている。この時間とともに周期的に変化する濃度の大きい方の点を連ねて得られる曲線は、 x_1 (電極から注入点までの距離) 点の、そして、濃度の小さい方の点を連ねて得られる曲線は、 x_2 (電極から注入点までの距離にストロークを加えた距離) 点の濃度時間曲線が得られる。この二つの曲線の式は、(25) の x_1 に各々の値を代入して得られるものである。

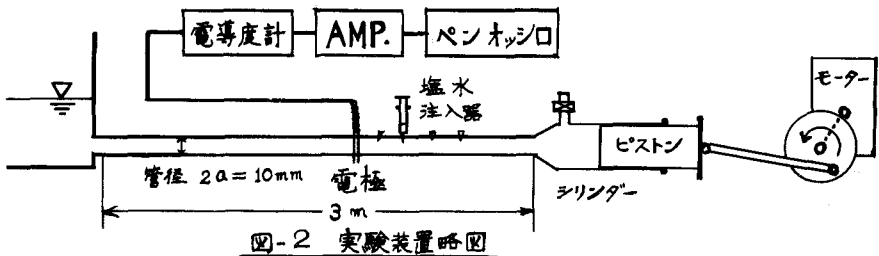


図-2 実験装置略図

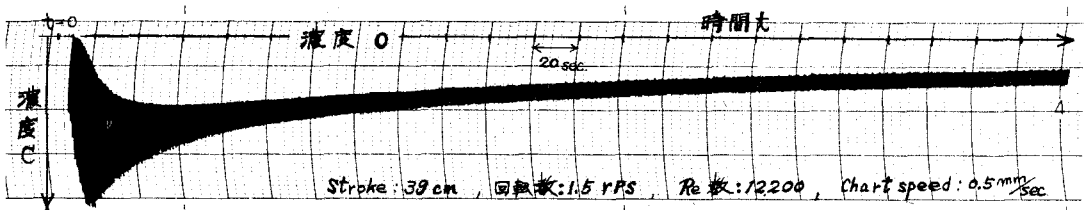


図-3 実測された記録例

§4. 実験結果と考察 実験によって得られた拡散係数 K の値を図-4に示している。このグラフから、 Re 数が増せば拡散係数はある程度まで上昇し、 Re 数が約10を越えたと再び下がる傾向を見せている。このことは、 Re 数が10以下では十分な乱流域に入っており、遷移領域になっているのではないかと考えられる。一オストロフは大きい方が拡散係数も大きくなる傾向を示している。これは、理論からの計算値と同じ傾向を表わしている。実測値と理論値との差が大きいのは、まず実験のスケールが小さくて、十分大きな Re 数の範囲での測定ができなかったため、実測値と乱流として計算を行った理論値とは、差が大きくなったことが考えられる。理論において流速分布形成の遅れや、往復動による特殊な乱れなども考慮すべきであるが、その影響は、上述のものに比較して極めて小さいと考えられる。

§5. おまけ 周期的流れにおいては、径深に対するストロークの大きさが、拡散現象に大きく影響を与えていることが分り(図-5)、感潮河川においても同様のことが考えられる。今回の実験は、スケールが小さかったため、 Re 数が十分大きな範囲まで実験を行うことができなかったが、これからは、大きなスケールでの実験を行って、10°以内の周期的流れにおける乱流拡散現象をつかんで行きたい。そして、最終的には開水路における現象まで理論を進展させたいと考えている。

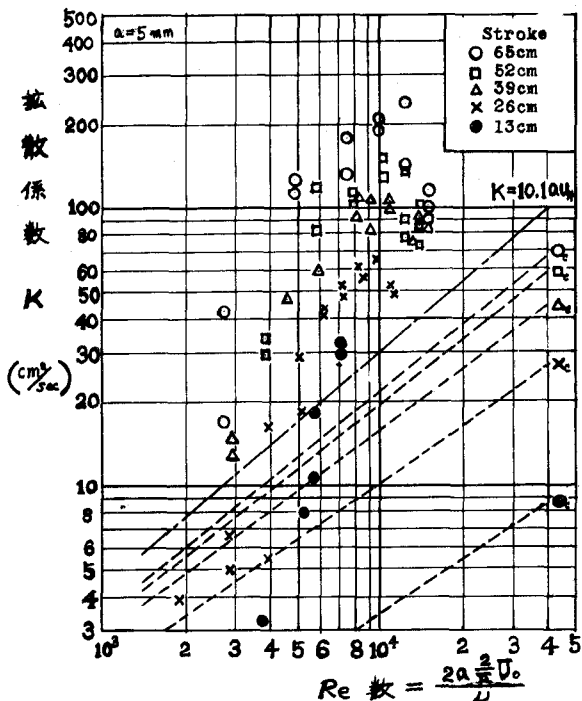


図-4 拡散係数 K の実測値と計算値

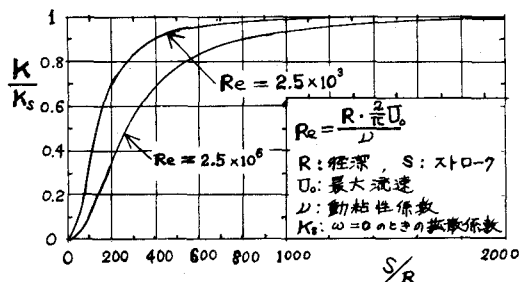


図-5 ストロークと拡散係数の関係

参考文献 1) Taylor, G.I. 1954. Proc. Roy. Soc. A. Vol. 223, 446-48. P.

"The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe"

2) Harleman, D.R.F. "Estuary and coastline hydrodynamics" — A.T. Ippen

"Pollution in Estuaries" 430-47. P.

3) Bowden, K.F. 1965. J. Fluid Mech. Vol. 21, part 2, 83-95. P.

"Horizontal mixing in the sea due to a shearing current"