

オイラー相関からラグランジエ相関への変換についての考察

京大牧生工 正員 庄司 光, 正員 山本剛夫

大阪府 正員 石川義紀

G.I. Taylor の式によって簡単に拡散の自乗平均値があらわされている。しかし、この Taylor の拡散式 $\overline{r^2} = 2 \overline{v^2} \int_0^t \int_0^t R(\tau) d\tau dt$ の中に含まれるラグランジエ相関 $R(\tau)$ は拡散物質の運動自身を観測できる場合にのみ測定可能であって、通常の拡散の場合は殆ど測定が不可能である。何故ならば、ラグランジエ相関は一個の粒子を追跡して得られる速度相関だからである。これに比して、オイラー相関は固定点を通る粒子の速度の相関として与えられ、比較的簡単に適当な計測器をそろえることによって観測することが出来る。オイラー相関をラグランジエ相関へと変換できれば、Taylor の式から拡散を記述し得ることになる。そこで、Lumely^{*}の考え方を基本としてオイラー相関からラグランジエ相関を推定することを試み、拡散実験を行なってこれに検討を加えた。

拡散のプロセスをランダムワークの理論を用いて記述する目的で、粒子の運動をランダム過程とみなし、粒子の運動自身にランダムワークの理論を適用することが一般に行われてきた。しかし、粒子自身の運動に対してランダムワークの理論を適用しても、それはラグランジエ量を与えるのみで、オイラー量との関連は原則として与えられないことになる。Lumely^{*}は、粒子の変位は粒子の通過する時間-空間の格子点から発せられる統計的に相関した指令によって支配されるとし、オイラー相関とラグランジエ相関との関係を簡単な場合について導いている。

今、一般的に、時間-空間の格子点によって発せられる指令についての遷移確率を次の様に定める。

P_i : ある空間内の点において速度が v_i である確率

$P_{ij}^{(0)}$: ある格子点において、速度が v_i であって、空間的に n ステップだけ離れた格子点での速度が v_j である確率

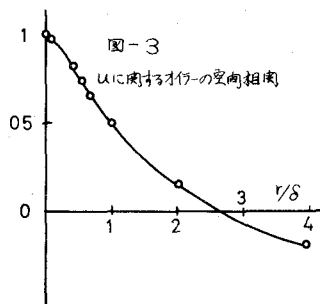
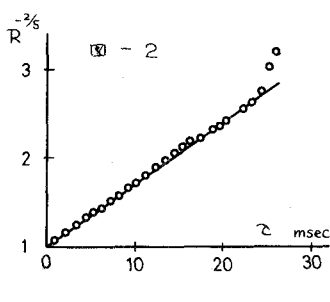
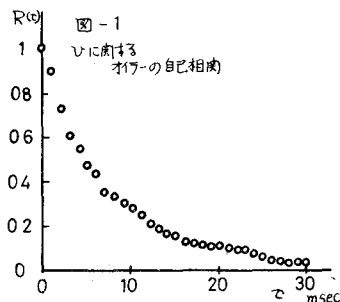
P_i : ある時刻において速度が v_i である確率

$P_{ij}^{(n)}$: ある格子点において、速度が v_i であって、時間的に n ステップだけ離れた点での速度が v_j である確率

このとき、オイラーの時間空間相関は

$$R(r, \tau) = \overline{v(x, t) v(x+r, t+\tau)} / \overline{v^2(x, t)} = \sum_i P_i g_i (v_i \sum_j v_j \sum_m P_{im}^{(0)} g_{mj}^{(0)}) / \sum_i P_i g_i v_i^2 = R(r, \tau, \Delta z_E, \Delta t_E)$$

r : n 空間ステップ ($= n \Delta z_E$), τ : ℓ 時間ステップ ($= \ell \Delta t_E$)



であらわされる。一方、粒子は一回の移動によって空間的に1ステップ移動すると同時に時間的に1ステップ移動するとし、 n 回の移動によって n 空間ステップ及び n 時間ステップだけ移動すると考えると、ラグランジ相関は

$$R(\tau) = v(t)v(t+\tau)/v^2(t) = \sum_i p_i g_i (\sum_j v_j^{(n)} \sum_k v_k^{(n)}) / \sum_i \sum_j p_i g_i v_j^2 = R(n, \Delta t_L, \Delta t_L)$$

τ : n ステップの時間間隔 ($= n \Delta t_L$)

これらの両相関はステップ数を n の函数となり、両者の間には、 $\Delta t_E = \Delta t_L$, $\Delta t_L = d \Delta t_E$ のとき

$$R(n) = R(n, n, d \Delta t_E, \Delta t_E) \dots (1)$$

の関係が得られる。 Δt_E は空間的な1ステップの間隔であり、ランダム変数であると考えられるので、 Δt_E の確率密度函数を $P(\Delta t_E)$ とすれば、平均的なラグランジ相関 $R(n)$ は

$$R(n) = \int R(n, n, d \Delta t_E, \Delta t_E) P(\Delta t_E) d \Delta t_E \dots (2)$$

であらわれる。この $R(n)$ がTaylorの拡散式中の $R(\tau)$ に相当するものであるから、Taylorの式の中へ入れます

$$\begin{aligned} \overline{Y^2} &= 2 \overline{v^2} \int_0^{N \Delta t_E} R(n) d(n \Delta t_E) d(n' \Delta t_E) \\ &= 2 \overline{v^2} (\Delta t_E)^2 \int_0^N \int_0^{N'} R(n) dn dn' \dots (3) \end{aligned}$$

によって、拡散中の2次元平均値 $\overline{Y^2}$ が与えられる。

風洞内において拡散実験を行ない、上述の関係を検討した。砂粒(直径0.6~1.2 mm)を敷きつめた粗度板の上に形成される乱流境界層を乱れの場として用いた。結果を要約すると以下の如くである。乱れの v 成分に関するオイラーの自己相関は図-1に示す。時間 τ に対して $R^{2/5}$ をプロットすると図-2の如くになり、 v に関する自己相関は $R(\tau) = [13.9 / (13.9 + \tau)]^{3/2}$ であらわされる。また、乱れの u 成分に関する Y 方向の空間相関 $R_{11}(0, \tau, 0)$ は図-3の結果となった。この $R_{11}(0, \tau, 0)$ のインテグラルスケールおよびマイクロスケールをもととして、Navier-Stokesから導かれる相関の一般形を用いて v に関するオイラーの時間空間相関 $R_{22}(0, \tau, 0, \tau)$ を推定すると、図-4に示す結果を得た。さらに、(4)式によりラグランジ相関を推定すれば、 $d=1$, $\sqrt{v} = 0.23 \text{ mm/sec}$ の場合について図-5の結果となる。 Δt_E の確率密度に正規型を仮定し、式(2)により $R(n)$ を求め、式(3)により $\overline{Y^2}$ を求めると、図-6に示す曲線を得た。エタンをトレーサーとして行なった拡散実験の結果を図-6の中に同時に示すか、これは $d=1/10$ の曲線に一致している。定数 d については更に検討を加える必要がある。

風洞内において拡散実験を行ない、上述の関係を検討した。砂粒(直径0.6~1.2 mm)を敷きつめた粗度板の上に形成される乱流境界層を乱れの場として用いた。結果を要約すると以下の如くである。乱れの v 成分に関するオイラーの自己相関は図-1に示す。時間 τ に対して $R^{2/5}$ をプロットすると図-2の如くになり、 v に関する自己相関は $R(\tau) = [13.9 / (13.9 + \tau)]^{3/2}$ であらわされる。また、乱れの u 成分に関する Y 方向の空間相関 $R_{11}(0, \tau, 0)$ は図-3の結果となった。この $R_{11}(0, \tau, 0)$ のインテグラルスケールおよびマイクロスケールをもととして、Navier-Stokesから導かれる相関の一般形を用いて v に関するオイラーの時間空間相関 $R_{22}(0, \tau, 0, \tau)$ を推定すると、図-4に示す結果を得た。さらに、(4)式によりラグランジ相関を推定すれば、 $d=1$, $\sqrt{v} = 0.23 \text{ mm/sec}$ の場合について図-5の結果となる。 Δt_E の確率密度に正規型を仮定し、式(2)により $R(n)$ を求め、式(3)により $\overline{Y^2}$ を求めると、図-6に示す曲線を得た。エタンをトレーサーとして行なった拡散実験の結果を図-6の中に同時に示すか、これは $d=1/10$ の曲線に一致している。定数 d については更に検討を加える必要がある。

* Lumely, J.L., Corrsin, S. : A Random Walk with both Lagrangean & Eulerian Statistics. Advances in Geophys., 6, 179-183, 1959

