

京都大学工学部 正員 石原藤次郎

京都大学工学部 正員 〇渡島 勝

1. まえがき

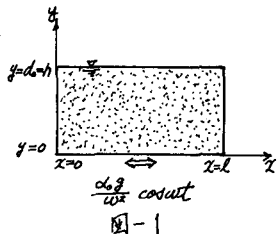
飽和砂の振動性状の解明を目的として、従来からかなり多くの研究が行われてきた。とくに近年は流動現象の解明に力点が置かれてゐる。本研究は、とくに、砂層の流動遷移過程における間けき水圧の動的性状を明らかにするを目的としている。連続的振動による、飽和砂層中に誘起され、それに従する構造物に動的な力として作用する間けき水圧を、理論的に解析し、その性状に關して考察を加へた。

2. 理論的展開¹⁾

振動による、間けき水に付加される動的な水圧を、間けき水圧と動的過剰間けき水圧とに分けて区別する。前者は、間けき水の慣性力による水圧である。通常、その大きさは振動加速度に比例的である。一方、後者は、砂層に与えられる全応力の増分に対しては有効応力と見なせる場合、あるわけ、間けき水が間けきから脱出しにくい場合に付加される過剰な水圧である。したがって、飽和砂層が振動を受ける場合、間けき水には、通常、間けき水圧は付加されるが、動的過剰間けき水圧は必ずしも付加されないものである。尤も、この前者は、これこれ種の挙動を含有ものと仮定した。

砂層の流動現象は、作用する振動力、砂層の物理的性質、砂層の含水量の拘束条件などの諸因子との関連によって異なる。したがって、ある砂層が完全流動を起すための条件、あるいは部分流動の流動比率を明らかにすることは、非常にむづかしく、今回は完全流動の場合について解析する。

図-1に示した有限の飽和砂層を解析のモデルとした。振動外力は、 $(\alpha g / \omega^2) \cdot \cos \omega t$ と与える。座標系は、図のように2次元の運動座標系で表わす。間けき水圧を σ_1 、動的過剰間けき水圧を σ_2 と表わし、間けき水の x, y 方向の速度を u, v と表わせば、間けき水の運動の式は、



$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \nu \nabla^2 v$$

図-1

と表わせる。式中の粘性抵抗項 $\nu \nabla^2 u, \nu \nabla^2 v$ に対して、差速浸透流で成立つ Darcy 則を便宜的に使用し、 $\nu \nabla^2 u = -(\lambda(\alpha)/k_{ex}(\alpha)) \cdot u_{xx}$, $\nu \nabla^2 v = -(\lambda(\alpha)/k_{ey}(\alpha)) \cdot v_{yy}$ と置く。 λ は間けき率、 k_{ex}, k_{ey} は透水係数であり、これは、振動の継続時間とともに変化すると考えられている。 u_{xx} は、間けき水の x 方向に対する相対速度であり、 $u = u_x$, $v = v_y + \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy$ と表わすことができる。ここに、 v と u との関係に明らかに述べた積分は、砂が y 方向のみに収縮流下すると仮定した場合の新しい y における砂層の v の速度を表わすものである。これらの関係を導入し、 $k_{ex}(\alpha) = k_{ey}(\alpha) = k(\alpha)$ とすれば、間けき水の運動の式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\lambda(\alpha)g}{k(\alpha)} u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - \frac{\lambda(\alpha)g}{k(\alpha)} \left(v - \int_0^y \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} dy \right) \quad (1)$$

連続の式は、微分体($dx dy \cdot 1$)内の質量保存則により、つぎのように表わされる。

$$-\left\{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right\} dx dy \cdot 1 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \lambda dx dy \cdot 1)$$

λ , dy は砂層の厚さとして変化する。また、水の圧縮性を考慮すれば、密度 ρ も断片的に変化すると考えなければならない。したがって、連続式の右辺は、つぎのように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \lambda dx dy) = \left\{ \lambda \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \rho \lambda \frac{\partial(dy)}{\partial t} \right\} dx dy$$

さらに、 $\partial \rho / \partial t = \rho \beta \partial \sigma_1 / \partial t$, $\partial(dy) / dy \partial t = \alpha \cdot \partial \sigma_2 / \partial t$, $\partial \lambda / \partial t = \alpha (1 - \lambda) \partial \sigma_2 / \partial t$ の関係と代入すると、連続式として次式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -(\beta \lambda \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \sigma_2}{\partial t}) \quad (2)$$

ここで、 α , β は、それぞれ砂層の横断断格の圧縮率、水の圧縮率とよばれる定数である。

式(1), (2)から σ_1 , σ_2 に関する基礎式として、次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y^2} - \frac{\lambda_0}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\lambda_0^2 g}{k} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = 0 \quad (3) \quad \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\lambda_0 g}{k} \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $c = \rho_0 \beta \approx \rho \beta$: 水中音速, $\lambda_0 \approx \lambda$: 初期間隙率, $k_0 \approx k$: 初期透水係数である。

σ_1 に関する境界条件および初期条件は、次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha_0 g \rho \cos \omega t, \quad \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\right)_{x=l} = \alpha_0 g \rho \cos \omega t, \quad \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\sigma_1\right)_{y=h} = 0, \quad \left(\sigma_1\right)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad (5)$$

σ_2 に関する境界条件および初期条件は、次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad (\sigma_2)_{y=d_0} = 0, \quad (\sigma_2)_{t=0} = \delta'(d_0 - y), \quad \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad (6)$$

(5)の条件のもとに式(3)を解けば、つぎの解を得る。

$$\sigma_1 = 4 \alpha_0 g \rho \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} R \left[\frac{\cosh \zeta_m x - \cosh \zeta_m (l-x)}{\zeta_m \sinh \zeta_m l} e^{i \omega t} \right] \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2h} + \frac{8 \alpha_0 g \rho}{l} e^{-\frac{1}{2} b_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} \\ \times \frac{1 - (-1)^n}{p_{mn}^2 + 4 \delta_m^2 \delta_n^2} \left[p_{mn} \cos g_{mn} t + \left\{ \frac{1}{2} b_0 \frac{p_{mn}}{\delta_{mn}} + 2 \omega \frac{\delta_m \delta_n}{\delta_{mn}} \right\} \sin g_{mn} \right] \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \cos \frac{(2m+1)\pi}{2h} y \quad (7)$$

ここで、 $b_0 = \lambda_0 g / k_0$, $\zeta_m = \delta_m + i \delta_m$, $p_{mn} = \delta_m^2 - \delta_n^2 + (n\pi/l)^2$, $g_{mn} = \left\{ \left[\left(\frac{(2m+1)\pi}{2h} \right)^2 + (n\pi/l)^2 \right] (c^2 \lambda_0) - b_0^2 / 4 \right\}^{1/2}$

$$\delta_m = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left\{ \left(\frac{(2m+1)\pi}{2h} \right)^2 - \lambda_0 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right\} + \left\{ \left(\frac{(2m+1)\pi}{2h} \right)^2 - \lambda_0 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right\}^2 + \left(\frac{b_0 \omega}{c^2} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{2} \left[- \left\{ \left(\frac{(2m+1)\pi}{2h} \right)^2 - \lambda_0 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right\} + \left\{ \left(\frac{(2m+1)\pi}{2h} \right)^2 - \lambda_0 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right\}^2 + \left(\frac{b_0 \omega}{c^2} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

であり、符号 n は変数 n のみとしてとることを意味する。式(7)で与えられる解は、振動初期における過渡解であって、式(7)の才1項が定常項と、才2項が非定常項を表わしている。したがって、壁面($x=0$)に作用する定常間隙水圧は、次式で与えられる。

$$(G_1) = 4\alpha g p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} \cdot \frac{1}{\delta_m^2 + \alpha_m^2} \cdot \frac{1}{\cosh \delta_m l + \cosh \alpha_m l} \cdot \cos \frac{(2m+1)\pi}{2h} y \cdot \left\{ (\delta_m \sinh \delta_m l - \alpha_m \sinh \alpha_m l) \sin \omega t - (\delta_m \sinh \alpha_m l + \alpha_m \sinh \delta_m l) \cos \omega t \right\} \quad (8)$$

(6)の条件のもとに式(8)を解けば、つぎの解を得る。

$$\begin{aligned} G_2 = & 4\delta_0 d_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)\pi} \cos \frac{(2m+1)\pi}{2d_0} y \left[\frac{1+\delta_m}{\delta_m} e^{-\delta_0(1-\delta_m)t} - \frac{1-\delta_m}{\delta_m} e^{-\delta_0(1+\delta_m)t} \right] \\ & + 4\delta_0 d_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)\pi} \cos \frac{(2m+1)\pi}{2d_0} y \cdot e^{-\delta_0 t} \left[\frac{1}{\delta_m} \sin \delta_0 g_m' t + \cos \delta_0 g_m' t \right] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\delta_m = \left[1 - \left(\frac{(2m+1)\pi C}{2d_0} / \sqrt{\lambda_0} \delta_0 \right)^2 \right]^{1/2}$, $g_m' = \left[\left(\frac{(2m+1)\pi C}{2d_0} / \sqrt{\lambda_0} \delta_0 \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$, $\alpha_0 = \alpha/\beta$ である。

3. 解の吟味・考察

式(7), (8), (9)で与えられる解は級数解であるが、その収束性はよく10項程度で十分である。

式(8)で与えられた間引き動水圧は、 δ_m , α_m の値が極度大衆化に基づいた式⁽²⁾と若干異なる。このことは、前者が砂が流動化する過程を解析の対象としたことにある。

いま、 $\lambda_0=1$, $k=\infty$ となる場合について考えよう。このとき、 $\delta_m = \sqrt{((2m+1)\pi/2h)^2 - (\omega/c)^2}$, $\alpha_m=0$ となるから、式(8)は

$$(G_1) = 4\alpha g p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} \cdot \frac{1 - \cosh \delta_m l}{\delta_m \sinh \delta_m l} \cdot \cos \frac{(2m+1)\pi}{2h} y \cdot \cos \omega t$$

となる。この式は、Werner & Sundquist が矩形水槽に作用する動水圧として与えた解と一致する。

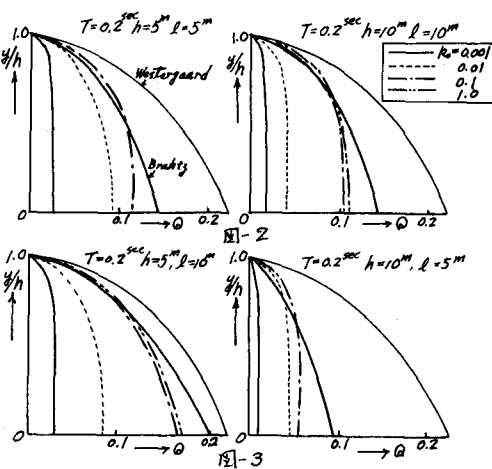
そこで、あらためて δ_m , α_m について検討する。これらの式の中の $\lambda_0(\omega/c)^2$ の値は、振動周期(T)が非常に短いか、あるいは水深(h)が非常に大きい場合でない限り、 $((2m+1)\pi/2h)^2$ にくらべて無視できる。したがって、普通の場合には、 δ_m , α_m の値は $((2m+1)\pi/2h)^2$ と $(\omega/c)^2$ の大小によって左右され、この値に大きく影響するものは透水係数であることがわかった。すなわち、透水係数がある程度より大きくなれば、 $(\omega/c)^2$ の値は無視でき、間引き動水圧の性状は、砂の存在を考慮しない純水の動水圧性状とほぼ同じであると考えてよい。しかるに、透水係数が小さい場合には、 $(\omega/c)^2$ の値が影響するため、間引き動水圧と振動力との間には位相のずれが生じ、間引き動水圧の分布性状も、飽和砂の性質(透水係数、間引き率)はらびに振動力の相変によって変化する。この点に関する詳細な検討は、つぎの数値計算例で行なう。

動的過剰間引き水圧を与えらる式(9)は、2つの級数部分からなり、その一般的性状を見えしめにくい。正整数nは $(2m+1)\pi/2d_0 < \sqrt{\lambda_0} \delta_0/c$ を満足する最大のmである。この値は、 d_0 , α_0 , δ_0 の値によって異なる。ところで、 α は砂の締め具合による、2次元定数である、ゆえに前者の場合には $0.9 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{gr}$ である。また、 β は $4.9 \times 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{gr}$ であるから、 α_0 は 0.184×10^3 は定数と考えることができる。したがって、通常は式(9)の第1項のみによる動的過剰間引き水圧を考慮すればよい。その性状に関する詳細な検討は、つぎの数値計算例で行なう。

4. 数値計算例

間引き動水圧に関しては、飽和砂層の厚さ(h)と長さ(l)が $(10^3, 10^3)$, $(10^3, 5^3)$, $(5^3, 10^3)$, $(5^3, 5^3)$ の場合に対して、振動周期は地震の卓越周期を考慮して0.2, 0.3, 0.4 secを与え、初期間引き率 α_0 、初期透水係数 α_0 をパラメータとして、式(8)によりその最大値の計算を行なった。

これらの結果から、先の分布性状について、つぎのようになっている。砂層の大きさを表わす無次元量 h/l についてみれば、2.0, 1.0, 0.5 であるが、この値が大きくなるほど、間隙水圧も大きくなることが認められる。また、間隙水圧性状は、いずれの事例においても 10^{-2} cm/sec より大きくなれば、純水の間隙水圧性状にほぼ等しくなり、 10^{-2} cm/sec よりも小さくなれば、間隙水の粗異、振動周期の粗異によっても、その性状にかなり影響する。図-2、図-3に結果の一例を示した。



動的過剰間隙水圧に関しては、砂層厚 5m の場合に対して計算を行った。図-4は、時間とパラメータとして動的過剰間隙水圧の挙動を示したものである。この図から、減衰時間は、透水係数が大きくなるほど、急激に短くなることがわかる。間隙水を $0.450, 0.430$ と与えてその粗異による影響についても検討したが、ほとんど影響はないといってもよさそう。

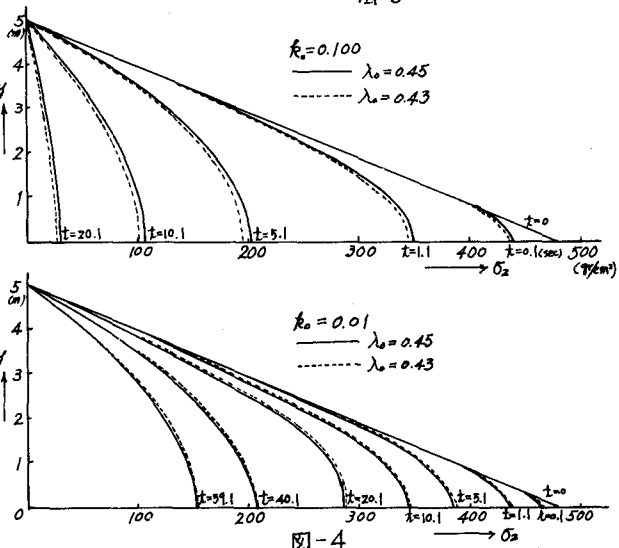


図-5は、深さをパラメータとして、過剰水圧の減衰の様態を示したものである。透水係数が、 1 cm/sec 程度よりも大きくなれば、非常に短時間で動的過剰水圧は減衰し、砂層は安定化する。しかしながら、透水係数が小さくなるにしたがって、過剰水圧の減衰時間は長くなり、それに伴って砂層の安定化がおくれる。また、深さ方向の減衰性状をみれば、上層ほど流動化している時間が長く、先の同じ、過剰水圧はほぼ一定であり、砂層の流下安定化が下層部から完了していくという現象も説明できる。

5. 結論

本研究は、砂層が完全流動化するに十分な振動力が作用すると仮定して、砂層が流下安定化の過程について解析を行った。しかしながら、現実的にさらに重要な事は、完全流動化を起すための条件、部分流動の現象を明らかにすることであり、今後、このような目的で研究を進めていきたい。

参考文献: 1) 石坂(廣) 見島(博): 振動時・間隙水圧性状に関する研究, 土木学会周知部研究報告 土木学会論文報告書, 1968. 2) 松尾(大策): 重力式岸壁の耐震性についての一考察, 土木学会論文報告書, 第70号, 1960.

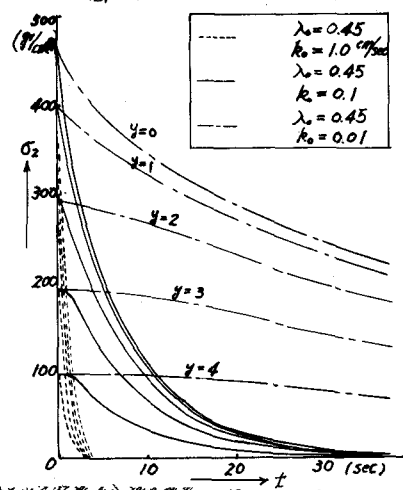


図-5