

北海道大学 工学部 正員 ○藤田 睦博

北海道大学 工学部 正員 山岡 勲

まえがき

融雪流出に関する要素としては放射、降雨、気温、風速等種々の因子があるが従来の実用的方法による融雪流出解析においては、これら諸要素のうち重要と思われる特定の要素のみに注目して、他の要素を固定するかもしれない仮定を設けてその要素による影響を分離除去して解析を行っている。しかし要素の固定、仮定によるその影響の除去これらは降雨による流出そのものの仮定分離を行なう至過には多くの不確定性を伴ない、計算値の実測値に対する誤差の大きな原因となっている。

筆者等はこの点に着目して、降雨融雪流出系を多入力、1出力系としてモデル化した、すなわち諸要素を同時に考慮した手法を提案し、このモデルの実用性を金山ダム流域における融雪時の流出解析例で検証した。

1. 基礎式

まず次の2点を仮定して融雪流出に関するスペクトル密度解析を取扱う。1) 融雪流出系は、線形系で近似しうる。2) 各要素(入力)と出力は定常確率過程である。1) の仮定は、従来の融雪流出解析(degree hour法等)で受け入れられている仮定である。2) の仮定については、融雪流出がかなり長期間に渡る現象である事を考えれば、この仮定が成立するものと考えられる。

まず外部入力を $I_1(t), I_2(t), \dots, I_n(t)$, 出力を $O(t)$, 又各 $I_i(t)$ に対応する荷重関数(インパルス過渡関数)を $W_i(t)$ $i=1, 2, \dots, n$ とする(fig 1-1)。このような系の動特性は、次式で表わせる。

$$O(t) = \int_0^{\infty} I_1(t-\tau) W_1(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} I_2(t-\tau) W_2(\tau) d\tau + \dots + \int_0^{\infty} I_n(t-\tau) W_n(\tau) d\tau \quad (1-1)$$

(1-1)式の両辺にそれぞれ $I_1(t-\tau), I_2(t-\tau), \dots, I_n(t-\tau)$ をかけて積分すると n 個の荷重関数に関する次の積分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{OI_1}(\tau) &= \int_0^{\infty} \varphi_{I_1}(\tau-\theta) W_1(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} \varphi_{I_2 I_1}(\tau-\theta) W_2(\theta) d\theta + \dots + \int_0^{\infty} \varphi_{I_n I_1}(\tau-\theta) W_n(\theta) d\theta \\ \varphi_{OI_2}(\tau) &= \int_0^{\infty} \varphi_{I_1 I_2}(\tau-\theta) W_1(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} \varphi_{I_2 I_2}(\tau-\theta) W_2(\theta) d\theta + \dots + \int_0^{\infty} \varphi_{I_n I_2}(\tau-\theta) W_n(\theta) d\theta \\ &\vdots \\ \varphi_{OI_n}(\tau) &= \int_0^{\infty} \varphi_{I_1 I_n}(\tau-\theta) W_1(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} \varphi_{I_2 I_n}(\tau-\theta) W_2(\theta) d\theta + \dots + \int_0^{\infty} \varphi_{I_n I_n}(\tau-\theta) W_n(\theta) d\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

入力間に相関のない場合は、(1-2)式は簡単となり次式で表わせる。

$$\varphi_{OI_i}(\tau) = \int_0^{\infty} \varphi_{I_i}(\tau-\theta) W_i(\theta) d\theta \quad (1-3)$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{OI_i}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T O(t+\tau) \cdot I_i(t) dt \\ \varphi_{I_i}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T I_i(t+\tau) \cdot I_i(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

(1.4)式の上式は、いわゆる $I_L(t)$ と $O(t)$ の相互相関関数(cross correlation)を示し、下の式は $I_L(t)$ の自己相関関数(Auto correlation)である。したがって(1.3)式においては、 n 個の積分方程式を独立に解けばよいことになる。各入力間に相関のある場合には、(1.2)式は(1.3)式のように簡単にはならない。

(1.3)式の形の積分方程式の解法には、種々の方法(代数的方法、厳密な方法—ガウスの方法、逆行列法、周波数法等)がある。ここでは周波数法すなわちスペクトル密度を求める事によって(1.3)式の積分方程式を解く。(1.3)式を書き直して

$$\varphi_{OI_L}(\tau) = \int_0^{\infty} \varphi_{I_L}(\tau - \theta) \cdot W_L(\theta) d\theta \quad (1.5)$$

この解を物理的実現性の条件 $W_L(t) = 0, \quad t < 0 \quad (1.6)$ を満足するものとして求める。

(1.5)式の両辺に $e^{-j\omega\tau}$ をかけて $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \varphi_{OI_L}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} W_L(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \varphi_{I_L}(\tau - \lambda) d\tau \quad (1.7)$$

$$\theta = \tau - \lambda \text{ とおくと } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \varphi_{OI_L}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} W_L(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \varphi_{I_L}(\theta) d\theta \quad (1.8)$$

$$S_{OI_L}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \varphi_{OI_L}(\tau) d\tau, \quad S_{I_L}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \varphi_{I_L}(\tau) d\tau \quad (1.9), (1.10)$$

$$\text{なるスペクトル密度を用いて } W(j\omega) = \int_0^{\infty} W_L(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.11)$$

$$\text{と考慮すると } W(j\omega) = \frac{S_{OI_L}(\omega)}{S_{I_L}(\omega)} \quad (1.12) \quad \text{を得る。}$$

$$\text{再度フーリエ変換を適用して、時間領域における解 } W(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.13) \quad \text{を得る。}$$

この $W(\tau)$ が、(1.6)式の条件を満足する事は知られている。²⁾

2. 解析例 (空知川 金山ダム流域、昭和39, 40年資料) このでは、入力として比較的資料の揃っている気温と降雨の2つの要素について計算した。したがって 0°C 以上の積算気温(degree hour) $D(t)$ と雨量 $R(t)$ を入力として、融雪と降雨による流出量 $Q(t)$ を出力とする2入力、1出力系を考え、積算気温と降雨間の相関は無いものとするれば、(1.3)式を用いることができ同式は次式で示される。

$$\varphi_{QD}(\tau) = \int_0^{\infty} \varphi_D(\tau - \theta) f(\theta) d\theta, \quad \varphi_{QR}(\tau) = \int_0^{\infty} \varphi_R(\tau - \theta) g(\theta) d\theta \quad (2.1), (2.2)$$

$f(\theta)$: Degree hourに対する荷重関数, $g(\theta)$: 降雨に対する荷重関数

$$\varphi_D(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T D(t+\tau) \cdot D(t) dt, \quad \varphi_R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R(t+\tau) R(t) dt$$

$$\varphi_{QD}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Q(t+\tau) \cdot D(t) dt, \quad \varphi_{QR}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Q(t+\tau) \cdot R(t) dt \quad (2.3)$$

$$\varphi_{QD}(\tau) = \varphi_{DQ}(-\tau) \quad \varphi_{QR}(\tau) = \varphi_{RQ}(-\tau)$$

2.1 自己スペクトル密度の計算³⁾

降雨及び積算気温の自己相関関数の1例を示すと fig. 2-1, fig. 2-2 の如くなる。図からわかるように内部雑音の影響が見られるが、いずれも単調減少していると考えられるので

$$\varphi(\tau) = \sum_{j=1}^N A_j e^{-a_j|\tau|} \quad (2.1)$$

と仮定して、試算の結果次式で充分近似することができた。

(fig. 2-1, fig. 2-2 の破線)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_R(\tau) &= 17.76 e^{-\tau/1} \\ \varphi_D(\tau) &= 5423 e^{-0.07\tau/1} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

これから直ちに自己スペクトル密度は、

$$S_R(\omega) = \frac{2 \times 17.76}{\omega^2 + 1}, \quad S_D(\omega) = \frac{2 \times 5423 \times 0.07}{\omega^2 + 0.07^2} \quad (2.3)$$

と表わされる。

2.2 相互スペクトル密度の計算

降雨-融雪期流出、積算気温-融雪期流出の相互相関関数の1例を fig. 2-3, fig. 2-4 に示す。やはり内部雑音の影響が見られるので図の曲線の如く近似した。 φ_{QR}

こゝでは、これらの相互相関関数からスペクトル密度を求めるのに図式近似によって計算を簡単化してみた。

相互スペクトル密度は、一般にその性質から複素数であり次のように表わせる。

$$S_{QD} = K(\omega) - jM(\omega) \quad (2.4)$$

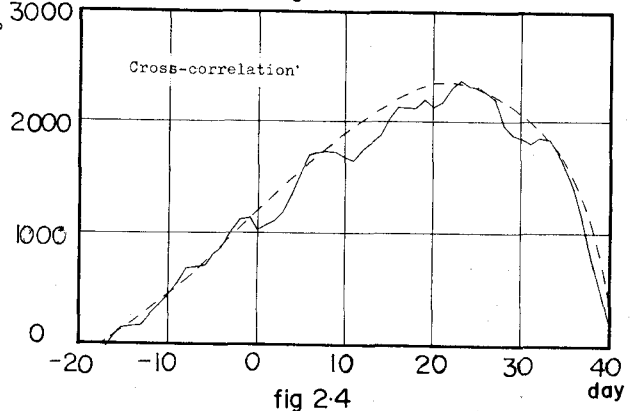
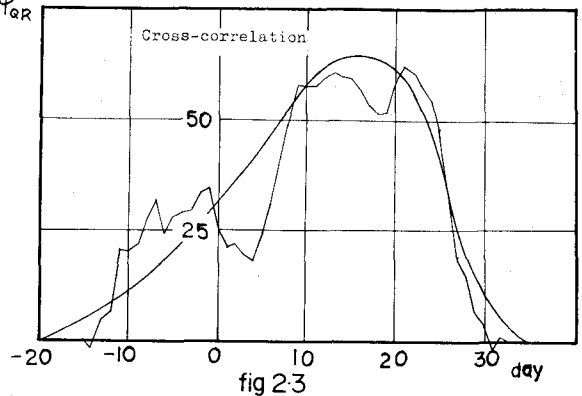
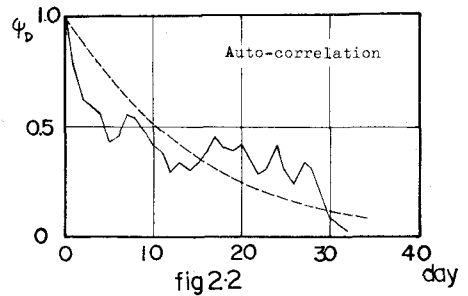
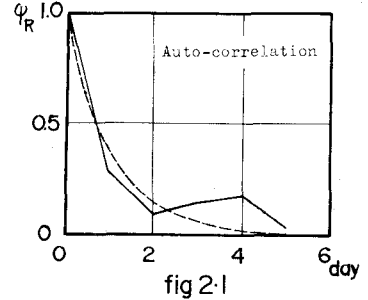
$$\text{こゝで} \quad K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{QD}(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} R_{QD}(\tau) \omega \sin \omega \tau d\tau + \int_0^{\infty} R_{QD}(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad \varphi_{QD} \quad (2.5)$$

$$M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{QD}(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} R_{QD}(\tau) \sin \omega \tau d\tau - \int_0^{\infty} R_{QD}(\tau) \sin \omega \tau d\tau \quad (2.6)$$

図式計算においては、台形近似を行なった。台形近似において fig. 2-5, fig. 2-6 の2種の基本台形を考えればよいわけであるが、相互スペクトル密



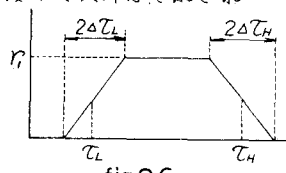


fig 2-6

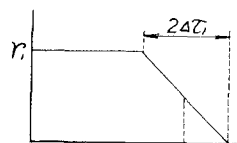


fig 2.5

$$K(\omega) = \int_0^{T_1+5T_1} r_1 \cos \omega t dt = r_1 T_1 \frac{\sin T_1 \omega}{T_1 \omega} \frac{\sin 5T_1 \omega}{5T_1 \omega}, \quad K(\omega) = \int_{T_1-5T_1}^{T_1+5T_1} r_1 \cos \omega t dt = r_1 T_1 \frac{\sin T_1 \omega}{T_1 \omega} \frac{\sin 5T_1 \omega}{5T_1 \omega} - r_1 T_1 \frac{\sin T_1 \omega}{T_1 \omega} \frac{\sin 5T_1 \omega}{5T_1 \omega}$$

(1.12)式において $W(\omega)$ は一般に複素数でこれを次の如くおくと

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}[W(j\omega)] + j \operatorname{Im}[W(j\omega)] \quad (2.8) \quad (1.13) \text{ 式の積分記号の中は}$$

$$W(j\omega)e^{j\omega T} = \text{Re}[W(j\omega)]\cos\omega T - \text{Im}[W(j\omega)]\sin\omega T + j\{\text{Re}[W(j\omega)]\sin\omega T + \text{Im}[W(j\omega)]\cos\omega T\} \quad (2.9)$$

$\operatorname{Re}[W(j\omega)]\sin\omega\tau, \operatorname{Im}[W(j\omega)]\cos\omega\tau$ は、 ω は奇関数なので(1.13)式は

$$W(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \operatorname{Re}[W(j\omega)] \cos \omega \tau - \operatorname{Im}[W(j\omega)] \sin \omega \tau \right\} d\omega \quad (2.10)$$

となり (1.6) 式を考慮して

$$W(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_e[W(j\omega)] \cos \omega \tau d\omega \quad (2.11) \quad \text{となり虚数部は関係なくなる。}$$

fig. 2.7 に積算気温と降雨に対する $\text{Re}[W(j\omega)]$ を示す。

2.3 荷重関数

2.3 荷重関数 fig. 2-7 の $\text{Re}[W(j\omega)]$ を相互スペクトルを計算したと同様に台形で近似し(2.1)式のフーリエ変換を行なって求めた荷重関数を fig. 2-8 に示す。

3. むすび

3. おすび 筆者等は、すでに入力として積算気温のみを用いて降雨流出は別個に分離同じく周波数法で融雪流出を解析したため、

実測値と計算値には相当の差が認められた⁴⁾。これはサンプリング間隔を小さくする事によってかなり改善された⁵⁾。それに比べてfig 2-9に見られる計算値は実測値とかなりよく適合している。たゞし融雪末期において実測値がはずれるのは、本計算法に残積雪量を表わす要素を考慮していないためだと思われる。したがって残雪量を表わす因子の付加が必要であろう。

しかし乍ら融雪期の流出量を推定する場合降雨流出と融雪流出を分けず、雨量と気温の2つの重要因子の資料だけで合計流出量を実用的に充分な精度で算出できる見通しを得たものとする。今後の研究における問題点としては、本手法を用いてこゝで取扱

つた要素と同様な扱いで更に日射、風速等の要素を付加すれば一層さめの細かい良い結果が得られるものと考ええる。

参考文献

- 1) ランダム変動に関する文献:
例文) 松本, 中央統計の自動制御
Crandall, Mark: Random Vibration in
mechanical system. Academic Press.
日野 情報理論的水素素の手法,
第12回水素理論演説会議文庫集 SA3.2
- 3) Blackman, Tukey: The Measurement
of Power Spectra, Dover Books
- 4) 山内, 電圧変動の電圧流出,
エレクトロニクス前刊, NGK/MTI/ETHD/5日
本字付録電圧変動特性調査報告書, IHD, 1973
- 5) 山内, 電圧変動の電圧流出, 電圧変動の電圧流出,
エレクトロニクス前刊, NGK/MTI/ETHD/5日

