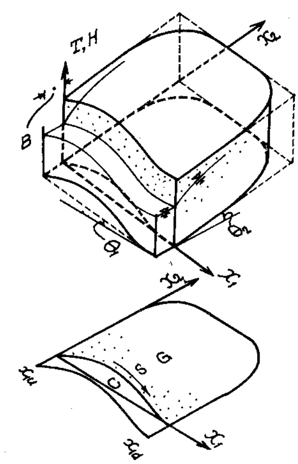
II－51　　流域水の挙動に関する一考察

名古屋大学工学部　正員　高木不折

1. まえがき：河川への流出現象は流域に存在するすべての流域水の挙動の一面として現われる。一つの流域では，とくに低水時では，力学的性質を異とする多くの成分水が相互に干渉しながら，それらを合わせた流域水全体にとって最も自然な状態を追求しつつ挙動しているであろう。したがって，全流域水の挙動を支配する量と法則が知られれば，流出現象（とくに低水流出）を理解する上に大きな助けとなるに違いない。本報はその第一段階として，最も簡単に河川水と地下水を取り上げ，流域水の挙動を支配する量と法則の物理的解釈をしようとしたものである。



T, H：水深
K：透水係数
γ：間隙率
$f_i = \frac{K}{\gamma}\sin\theta_i$
$r(t)$：地下水面（帯）単位面積当りの水供給強度
ρ：水の密度　g：重力の加速度

2. 流域水の挙動に関する変分形式：いま，右図に示す地下水帯，河川を考える。以下の諸記号は図示のとおりである。地下水の運動がDarcy則に従うものとすると，運動の基礎式は

$$\gamma\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{KT\frac{\partial T}{\partial x_i} - f_i T\right\} + r \qquad (1)$$

となる。地下水位が $T = T^* + \delta T$ と表現されると考えよう。ここで，T^* は現実に起る値であるとし，δT は T^* からの仮想変位である。（あるいは T^* は平均流，δT は擾乱と考えてもよい）。いま，(1)式の両辺に $-\rho g\delta T$ を乗じ，$\delta T \ll T^*$ としたうえで x_i, t について積分すると，簡単な計算で，

$$-\frac{1}{2}\rho g\int(\delta T)^2 dx_i = \delta\iint_{tG}\rho g\left\{\gamma\frac{\partial T^*}{\partial t}T + \sum_i\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_i} - f_i T^*\right)\frac{\partial T}{\partial x_i} - rT\right\}dx_i dt$$

$$+\iint\left[\rho g\left\{KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_2} - f_2 T^*\right\}\frac{dx_1}{ds} - \rho g\left\{KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_1} - f_1 T^*\right\}\frac{dx_2}{ds}\right]\delta T\, ds\, dt \leqq 0 \cdots (2)$$

となる。河川水については，運動方程式 $Q = Q(H, \frac{\partial H}{\partial s})$ と連続式とから $\frac{\partial(BH)}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \cdots (3)$ であるから，同様にして，

$$-\frac{1}{2}\rho g\int(\delta H)^2 ds = \delta\iint_{tC}\rho g\left\{\frac{\partial(BH^*)}{\partial t}H - Q^*\frac{\partial H}{\partial s}\right\}ds\,dt + \int\left[BQ^*\delta H\right]_{x_{1d}}^{x_{1u}}dt \leqq 0 \cdots (4)$$

をうる。ここで，(2)(4)式の変分には T, H のみが関与し，T^*, H^* は関与しないものと考える。したがって，(2)(4)式は $\delta T = 0$, $\delta H = 0$ すなわち $T = T^*$, $H = H^*$ の場合にのみ0となる。地下水帯および河川について境界条件が与えられるか，あるいは，然るべき自然境界条件を採用すると，(2)(4)式の境界積分は0となり，上記の変分を0とする条件 Euler-Lagrange's equation は T^*, H^* に関する通常の運動方程式(1)(2)式と一致する。換言すれば，地下水・河川水の挙動は，それぞれの領域 G, C における(2)(4)式右辺第一項の変分を0とするものであると考えることができる。

以下この考えを普遍して，全流域水について考察する。そのためにつぎの量を考えよう。

$$J = J_g + J_c = \iint_{tG}\mathcal{L}_g\, dx_i dt + \iint_{tC}\mathcal{L}_c\, ds\, dt \qquad \cdots\cdots (5)$$

ここに，右辺第1，2項の積分を J_g, J_c と表わした。また $\mathcal{L}_g$, $\mathcal{L}_c$ はそれぞれ

$$\mathcal{L}_g = \rho g\left\{\gamma\frac{\partial T^*}{\partial t}T + \sum_i\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_i} - f_i T^*\right)\frac{\partial T}{\partial x_i} - rT\right\} \cdots (6) \qquad \mathcal{L}_c = \rho g\left\{\frac{\partial(BH^*)}{\partial t}H - Q^*\frac{\partial H}{\partial s}\right\} \cdots (7)$$

とする。さらに河川水は地下水帯の境界の一部に一致しているものとする。ここで変分

$$\delta J = \delta\{J_g + J_c\} = \delta\left\{\iint_{tG} \mathcal{L}_g \, dx_i \, dt + \iint_{tC} \mathcal{L}_c \, ds \, dt\right\} = 0 \quad \cdots\cdots (8)$$

を考えよう。これを書き換えると，

$$\delta J = \int_t\int_G \left\{\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial T} - \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial T_{x_i}}\right)\right\} \delta T \, dx_i \, dt + \int_t\int_C \left\{\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial H} - \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial H_s}\right) - \rho g\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_2} - f_2 T^*\right)\frac{dx_1}{ds} + \rho g\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_1} - f_1 T^*\right)\frac{dx_2}{ds}\right\} \delta H \, ds \, dt$$

$$+ \int_t\int_b \left\{-\rho g\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_2} - f_2 T^*\right)\frac{dx_1}{ds} + \rho g\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_1} - f_1 T^*\right)\frac{dx_2}{ds}\right\} \delta T \, ds \, dt - \int \left[Q^* \delta H\right]_{x_{1d}}^{x_{1u}} dt = 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

となる。この式より地下水の運動については Euler Lagrange's eq. として $\gamma\frac{\partial T^*}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_i} - f_i T^*\right\} - r = 0$，地下水帯と河川における自然境界条件として，$\frac{\partial(BH^*)}{\partial t} + \frac{\partial Q^*}{\partial S} - \rho g\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_2} - f_2 T^*\right)\frac{dx_1}{ds} + \rho g\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_1} - f_1 T^*\right)\frac{dx_2}{ds} = 0$，また，河川以外の地下水帯の境界 b では，与えられた境界条件あるいは自然境界条件 $-\rho g\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_2} - f_2 T^*\right) \times \frac{dx_1}{ds} + \rho g\left(KT^*\frac{\partial T^*}{\partial x_1} - f_1 T^*\right)\frac{dx_2}{ds} = 0$ がえられる。これらの式は，地下水，河川水の方程式に一致する。言いかえれば，「流域水全体の挙動は(8)式の変分形式で統一的に表現され，この枠内において河水と地下水が運動をしており，その結果として流出現象（とくに河水地下水の相互干渉の大きい低水流出）が起る」と解釈することができる。

3．Local Potential とその物理的意義 ： (8)式の変分では T^*, H^*, $\frac{\partial T^*}{\partial x_i}$, $\frac{\partial H^*}{\partial s}$ は変分に関与しないものと考えた。すなわち，これらを一旦固定した上で，これらからの仮想変位（あるいは擾乱）を考えたとき，現実に起る運動（あるいは平均流）について，(5)式の積分が定留値をとるのである。この意味で J_g, J_c を Local potential と呼ぶ。いま，$T = T^*$, $H = H^*$ とした場合の $\mathcal{L}_g$, $\mathcal{L}_c$ を $\mathcal{L}_g^*$, $\mathcal{L}_c^*$ とすると，これらは実は，地下水単位領域・河川単位長について単位時間に「Ⓐ流れとして流出する potential energy と，この領域がその周辺の圧力に抗してなす仕事によって失われる energy の和」あるいは「Ⓑ単位領域の total energy の時間的変化の割合，流れにより出てゆく運動の energy（地下水帯ではこの項はない）および，単位領域内で失われる energy の和」に等しいことが導かれる。すなわち，Local potential は「流れの flux を固定したままで，地下水位・河川水位を仮想的に変化させた場合のⒶあるいはⒷの全流域，任意の時間にわたる積分」を意味しており，(8)式の変分原理は，この Local potential が定留なるように流域水が挙動することを示している。

なお，(5)式の被積分関数には $\frac{\partial T}{\partial t}$ などの項が含まれていない。すなわち，(8)式の変分では t は単なるパラメーターの役目しか果していないので，(8)式はまた，

$$\delta\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right) = \delta\left\{\frac{\partial J_g}{\partial t} + \frac{\partial J_c}{\partial t}\right\} = 0 \quad \cdots\cdots (10)$$

とも同値である。(8)式が系のある時間発展について成立したのに対し，この(10)式は任意の瞬間での系の性質を示すことはいうまでもない。以上をまとめると，「流域水の挙動は Local potential あるいはその時間的変化の割合の定留性」として把えることができる。

4．あとがき ： 以上，流域水の挙動とその物理的解釈について述べた。しかし，この結果は実際の流出解析をする上にはまだ不十分である。一方，流域水の状態には確率・統計的要素が多く含まれているが，確率計算の基準をどこに置くかも詳しくは検討されていないようである。現在，本報に述べた諸量を力学的な基礎として，流域水の挙動の統計的表現とその解析方法，および低水流出における河川水・地下水の役割について検討をしている。