不定流の差分計算における誤差について

名古屋大学工学部　正員　○　足立昭平
ＫＫ　大林組　　　　正員　　中川金爾

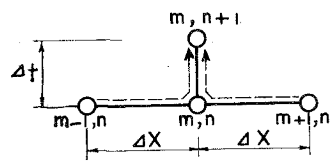
開水路不定流の数値解析はすでに目新らしいものではなく計算例も少なくはない。われわれも従来の計算例にならって，貯水池背水領域の水面変動の数値計算を試み，貯水池埋没あるいはダム操作に関する基礎資料を検討しようと図った。しかし，その計算過程において，背水領域の水路長差分 Δx の選定がきわめて微妙であって，それが重大な誤差をもたらす危険性を多分に有していることが認められた。本報告はそれらの誤差を例示し，差分近似法の問題点を提起しようとしたものである。

単位巾当りの流量 q に関する不定流方程式の特性曲線方程式は次式で与えられる。

(1)　$q_t+(u\pm c)q_x-(u\mp c)\{y_t+(u\pm c)y_x\}-c^2(S_0-S_f)=0$

ここに，複号同順であって，上が正特性曲線方程式，下が負特性曲線方程式である。また，y：水深，u：平均流速（$=q/y$），c：波速（$=\sqrt{gy}$），S_0：河床勾配，S_f：まさつ勾配（$=n^2q^2y^{-10/3}$）である。

常用の近似法に従って，格子点 $(m-1,n)$，(m,n)，$(m,n+1)$ に正特性曲線方程式の1次差分近似を，格子点 $(m+1,n)$，(m,n)，$(m,n+1)$ に負特性曲線方程式のそれを適用して，両者を組合せれば，y，q の計算式は



図－1　差分格子点

(2)　$y_{m,n+1}=y_{m,n}-(q_{m+1,n}-q_{m-1,n})(\Delta t/2\Delta x)$
$\qquad -\{(u_{m,n}^2-c_{m,n}^2)(y_{m+1,n}-2y_{m,n}+y_{m-1,n})-u_{m,n}(q_{m+1,n}-2q_{m,n}+q_{m-1,n})\}(\Delta t/2c_{m,n}\Delta x)$

(3)　$q_{m,n+1}=q_{m,n}+c_{m,n}^2(S_0-S_f)_{m,n}\Delta t-u_{m,n}(q_{m+1,n}-q_{m-1,n})(\Delta t/2\Delta x)+(u_{m,n}^2-c_{m,n}^2)(y_{m+1,n}-y_{m-1,n})(\Delta t/2\Delta x)$
$\qquad -\{u_{m,n}(u_{m,n}^2-c_{m,n}^2)(y_{m+1,n}-2y_{m,n}+y_{m-1,n})+(u_{m,n}^2+c_{m,n}^2)(q_{m+1,n}-2q_{m,n}+q_{m-1,n})\}(\Delta t/2c_{m,n}\Delta x)$

となる。1次差分近似は Δt および Δx について

(4)　$(y_{tt}/y_t)\Delta t/2\ll 1$，$(y_{xx}/y_x)\Delta t/2\ll 1$，$(q_{tt}/q_t)\ll 1$，$(q_{xx}/q_x)\ll 1$，…

を仮定するものであり，さらに，$(y_{xx}/y)\Delta x^2/2\ll 1$，$(q_{xx}/y)\Delta x^2/2\ll 1$ であれば，

(5)　$y_{m,n}=(y_{m+1,n}+y_{m-1,n})/2$，　$q_{m,n}=(q_{m+1,n}+q_{m-1,n})/2$

とおいてよい。したがって，(2)，(3)式の右辺最尾項はいずれも省略されて，両式はそれぞれ連続方程式および運動方程式を Δt について1次，Δx について2次の差分近似であらわした計算式に帰する。

この計算の収束性については，同種の線型方程式の数値解析の吟味から，

(6)　$\Delta x/\Delta t<u\pm c$

すなわち，Δt，Δx が正負両特性曲線で囲まれる支配領域にあることが条件とされている。しかし，同時に差分近似の前提条件として，(4)式が満される必要のあることはいうまでもない。

計算例としてとりあげた水路は図－2 (iii) に示すようであり，同図の(i)，(ii)は上流端で流量 $q(x=0)$ を直線的に増減せしめた場合の q と y の時間的推移を，初期値 $q(t=0)$，$y(t=0)$ との差で示したものである。また(iv)，(v)は同じ水路条件で上流端流量を一定に保って計算を続けたものであり，Δx の差分近似による打切り誤差の累積状態を示す。(2)，(3)式によるこの計算例は，(6)式の条件は満足しているが

れども，明らかに背水領域上流端附近に異常値を生じており，しかもそれらが湛水領域で累積されている。同じ計算を Δt および Δx を変えて計算した結果によれば，Δt の変化は(6)式の範囲内で，ほとんど同じ結果をもたらすが，Δx を大きくとると異常値は著しく増大し，背水領域上流端の異常値がもっぱら Δx の選定に依存していることが確められた。

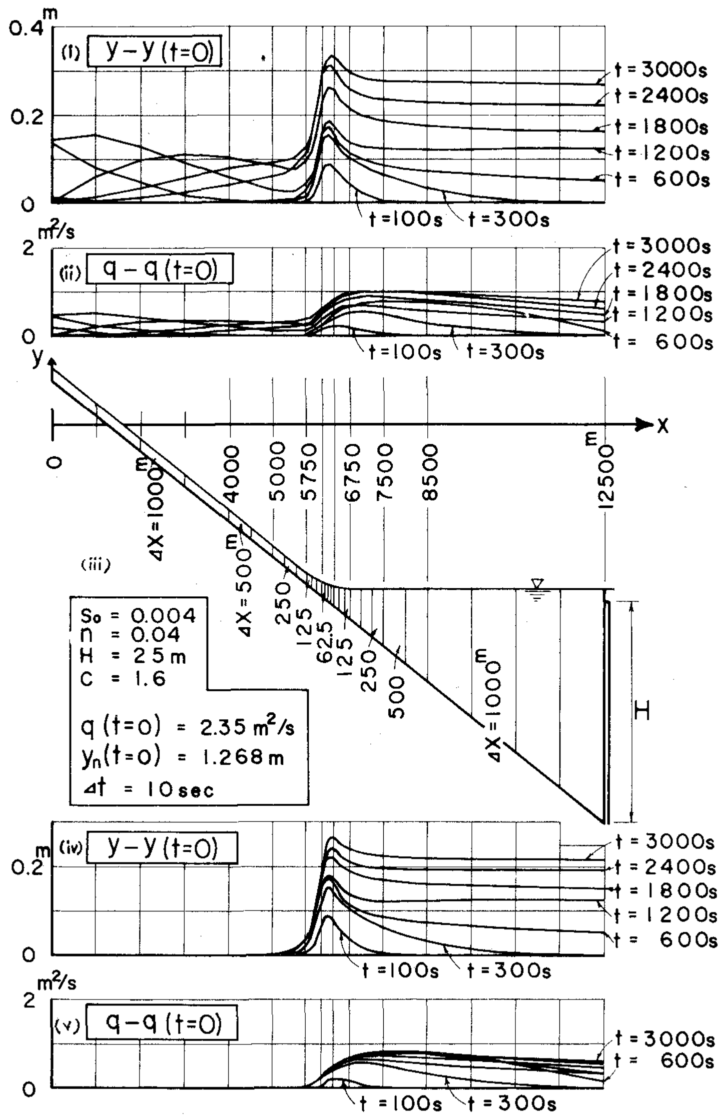
Δx を吟味するため流量一定の場合をとりあげ，等流水深 y_n を用いて無次元量

(7) $\eta = y/y_n$, $\xi = xS_0/y_n$

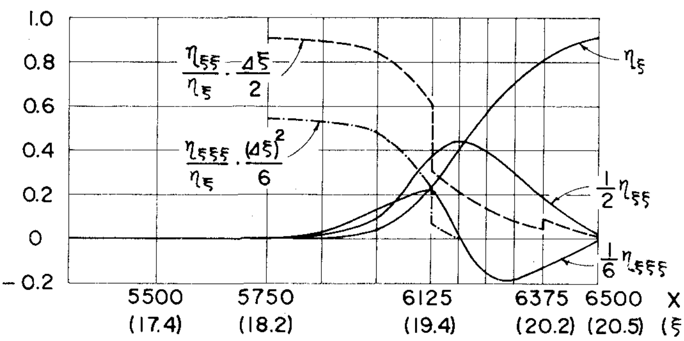
を導入すれば，

(8) $(y_{xx}/y_x)\Delta x/2 = (\eta_{\xi\xi}/\eta_\xi)\Delta\xi/2$

であるから，(4)式の Δx に関する1次差分近似の条件は η_ξ, $\eta_{\xi\xi}$, … の値から推量できる。図－3は上の例における初期値に関する $\eta_\xi, \eta_{\xi\xi}$ … を示したものであり，それらが背水領域上流端附近でかならずしも無視できないことを示している。一般に $\eta_\xi, \eta_{\xi\xi}, \dots$ は h_n/h_c（h_c：限界水深）をパラメータとして与えられ，h_n/h_c が大きくなれば2次以上の微分商は図－3のそれ（$h_n/h_c=1.535$）よりもずっと小さくはなるが，図－2の計算例で示唆される重要な問題点は，それらの累積傾向が見られることである。



図－2　背水領域における不定流数値計算例



図－3　計算例における初期値の打切り誤差