II—10 防波堤開口部を通過する波浪について

神戸大学工学部 正員 ○杉本修一
明石工業高等専門学校 正員 西村益夫

無限に延びた直線の防波堤の1ヶ所に開口部があるときその開口部を通過する波浪については従来より多くの研究者によって報告がなされている。例えばLambは彼の名著Hydrodynamics[1]にこの問題の近似計算を述べている。1896年にSommerfeld[2]は半無限長の直線の尖端を回折する波について波動方程式を抛物線座標を用いて変換しその変換された方程式について厳密解を求めした。Schwarzschild[3]はこの半無限長の直線の尖端を回折する波についてのSommerfeldの解を2つ重ね合せてそれに境界条件を満すような修正項を加えた解を1902年に発表した。その後1952年にJohnsonはこれらの理論に基いてよく知られている図表を発表した。著者らは以前に小規模で且つ簡単ではあったが実験を試みたことがあった。その時Johnsonが発表しているような図とは少し異なるような回折をしている場合があることに気がついた。開口部を波浪が通過するときの問題は、船舶の港への出入、或いは防波堤の配置の問題などに関連して、現実の問題としても重要と考えられる。そこで、この問題についてもう少し厳密に考察してみようとした試みの1つがこの報告である。

その方法はSchwarzschildのように別の場合の解を2つ重ね合わすというようなことをしないで、波動方程式を楕円座標を用いて変換して、直接的に、無限に延びた直線の1ヶ所に開口部があるときの解を得ようとするものである。問題を簡単にするため、等深として考えることにした。

長波については、静水面よりの水位上昇高 ζ はよく知られているように

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = gd\,\nabla^2\zeta, \qquad d:\text{等水深}$$

が成立する。さらに $\zeta=\phi\cdot e^{i\sigma t}$ として楕円座標 $x+iy=c\cdot\cosh(\xi+i\eta)$ を用いれば

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{\sigma^2c^2}{2gd}(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)\phi = 0, \qquad (1)$$

となる。この方程式は変数分離が可能である。このことは方程式を解くときに利用される。そこで、方程式を解くに際して入射波が入ってくる下半面と、開口部を通過してから以後の上半面の2つの部分について考えることにする。

1. 下半面　無限遠方より平面波が角度 θ で入射してくるものと考えれば、その入射波 ϕ_{w1} は

$$\phi_{w1} = \mathcal{R}e\cdot\exp\{ikc(\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta\cos\theta+\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta\sin\theta)\}, \qquad (2)$$

茲に $\mathcal{R}e$ は実部を表示する

if, $\mathrm{ch}\,\xi\cos\theta = p\cos\xi_\theta,\quad \mathrm{sh}\,\xi\sin\theta = p\sin\xi_\theta,\quad p^2=\mathrm{ch}^2\xi\cos^2\theta+\mathrm{sh}^2\xi\sin^2\theta.$ (3)

$$\phi_{w1} = \mathcal{R}e\cdot\exp\{ikcp\cdot\cos(\xi_\theta-\eta)\} = \mathcal{R}e\cdot\left[J_0(kcp)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(kcp)\cos n(\xi_\theta-\eta)\right]$$

$$= J_0(kcp)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mJ_{2m}(kcp)\cos 2m\xi_\theta\cos 2m\eta+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mJ_{2m}(kcp)\sin 2m\xi_\theta\sin 2m\eta. \qquad (4)$$

防波堤に相当する直線上においては $(\partial\psi/\partial\eta)_{\eta=0}=0$ でなければならない。そのため ψ_{u2} なる関数を新らたに加えて $\psi_u=\psi_{u1}+\psi_{u2}$ が境界条件を満足するようにすれば，その関数 ψ_u は

$$\psi_u=\psi_{u1}+\psi_{u2}=J_0(kcp)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(kcp)\cos 2m\xi_0\cos 2m\eta \quad . \tag{5}$$

2. 上半面　　上半面すなわち波浪が開口部を通過してから後は波浪は回折するが無限遠方に至れば波浪は消えるであろう。この性状を考えて，上半面においてはつぎの関数 ψ_0 を仮定する。

$$\psi_0=J_0(kcp)+\sum_{m=1}^{\infty}B_m e^{-\lambda_m\xi}\cos 2m\eta \tag{6}$$

直線上に沿っては $(\partial\psi_0/\partial\eta)_{\eta=0}=0$ でなければならないが，この条件は満足している。また上式には2つの未知係数 B_m と λ_m があるが，B_m は開口部において $(\psi_u)_{\xi=0}=(\psi_0)_{\xi=0}$ という条件より

$$B_m=2(-1)^m J_{2m}(kcp)\cos 2m\xi_0. \tag{7}$$

つぎに λ_m であるが，この係数の決定には変分学のたすけをかりることにする。すなわち

$$I=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2-\frac{\sigma^2c^2}{2gd}(\mathrm{ch}\,2\xi-\cos 2\eta)\psi^2\right]d\xi\,d\eta = \min \tag{8}$$

この式に式−(6)を代入して，$\partial I/\partial\lambda_m=0$ より λ_m を決定すればよい。すなわち

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial\lambda_1}&=1-\frac{8}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1^2+1}{(\lambda_1^2-1)^2}q=0,\\
\frac{\partial I}{\partial\lambda_2}&=1-\frac{8\times 4}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2^2+1}{(\lambda_2^2-1)^2}q=0,\\
&\text{-------------}\qquad q=\frac{\sigma^2c^2}{2gd}\\
&\text{-------------}\\
\frac{\partial I}{\partial\lambda_s}&=1-\frac{8s^2}{\lambda_s}+\frac{\lambda_s^2+1}{(\lambda_s^2-1)^2}q=0
\end{aligned} \tag{9}$$

---

(1) Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th. Ed. 1959. pp. 553.

(2) Sommerfeld, A. : Mathematische Theorie der Diffraktion, Mathe. Ann. Bd. 47, 1896, S. 317.

(3) Schwarzschild : Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt, Mathe. Ann. Bd. 55, 1902.

(4) Johnson, J.W. : Generalized wave diffraction diagrams, Proc. Second Conf. Coastal Eng., Berkeley, Calif., The Engineering Foundation Council on Wave Research, 1952, pp. 6～23.