

京都大学工学部 正会員 工博 ○岩垣 雄一
京都大学大学院 学生員 工修 酒井 哲郎

1. はしがき

hyperbolic waves というのは、第1種完全四積分 K の値が 3 以上の場合のフノイド波の近似的表現であることも、昨年度の年次学術講演会において述べた。このような波の理論を提案した理由は、海岸に近い浅いところに適用されるべきフノイド波の理論には、Jacobi の四角関数やオ1種およびオ2種の完全四積分が含まれるため、その数学的取扱いが非常に面倒であることから、とくに $K \geq 3$ の場合にのみ適用されるという制限はあるが、数学的取扱いが非常に簡単な初等関数によって表現されるフノイド波の近似波も導き、これを hyperbolic waves と名付けたわけである。

ここでは、まず波速 c と静水面からの波の挙高 η_0 を取り上げ、hyperbolic waves の理論式によって求めた曲線と、フノイド波、Stokes 波および微小振幅波の各理論曲線とを比較し、 $K < 3$ のフノイド波の近似ができない領域では、すでにフノイド波理論そのものも実際には適用できなくて、Stokes 波の理論も適用すべき領域であること、換言すれば、実際問題に適用する場合には、フノイド波の理論は必要でなく、hyperbolic waves と Stokes 波の両理論で十分であることを示す。

ついで、hyperbolic waves の応用例の1つとして、圧力式波高計の場合に問題となる圧力波高と実際の波高との関係を求め、微小振幅波理論として取扱った場合との誤差の問題を検討する。そして最後に、Munk が孤立波の理論を浅海における周期波に適用する場合に、有効波長あるいは有効周期という概念を導入したが、このような概念を用いて孤立波の理論を適用すると、かなりの誤差ともなうこと、および hyperbolic waves の理論を適用すれば、有効波長とか有効周期という概念を用いる必要がないことを示す。

2. フノイド波と hyperbolic waves

(1) 波速 フノイド波のオ2近似の波速式は

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left(1 - \frac{\delta}{H} \frac{H}{h}\right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{1 - (\delta/H)(H/h)} \frac{H}{h} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K}\right) + \left\{ \frac{1}{1 - (\delta/H)(H/h)} \right\}^2 \left(\frac{H}{h}\right)^2 \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{E}{K} \left(\frac{E}{K} + \frac{3}{4}k^2 - 1\right) - \left(\frac{k^4 + 14k^2 - 7}{40}\right) \right\} \right\} \quad (1)$$

$$\text{ここに、} \quad \frac{\delta}{H} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1\right) + \left(\frac{H}{h^2}\right) \frac{1}{12k^4} \left\{ 8 - 11k^2 + 3k^4 - (8 - 7k^2) \frac{E}{K} \right\} \quad (2)$$

であらわされ、オ hyperbolic waves の波速式は上式で $k=1$ および $E=1$ とおけば、 $h_x = h - \delta$ であるから次式のようになる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left(1 - \frac{1}{k} \frac{H}{h}\right) \left\{ 1 + \left(1 + \frac{1}{k} \frac{H}{h}\right) \frac{H}{h} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K}\right) + \left(1 + \frac{2}{k} \frac{H}{h}\right) \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left\{ \frac{1}{k} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{20} \right\} \right\} \quad (3)$$

この場合、オ1種完全四積分 K は、近似的に次式のようにあらわされる。

$$K = \frac{3}{4} T \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\frac{H}{h} \right)^{1/2} \left\{ 1 - \alpha \left(\frac{H}{h} \right)^m \right\}^n \quad (4)$$

$H/h \leq 0.55$ のとき, $\alpha = 1.3$, $m = 2$, $n = 1/2$; $H/h > 0.55$ のとき $\alpha = 0.54$, $m = 3/2$, $n = 1$

ここに, H は波高, h は水深, h_t は波谷からの水深, δ は波の谷から静水面までの高さ, T は波の周期, k は Jacobi の不完全楕円の母数, E は第 2 種の完全楕円積分である。

(2) 静水面からの波の峯高 η_0 ノイド波のオ 2 近以の峯高 η_0 は

$$\frac{\eta_0}{H} = 1 - \frac{1}{K^2} \left(\frac{E}{K} + K^2 - 1 \right) - \left(\frac{H}{h_t} \right) \frac{1}{12 K^4} \left\{ \delta - 11 K^2 + 3 K^4 - (\delta - 7 K^2) \frac{E}{K} \right\} \quad (5)$$

hyperbolic waves の η_0 は

$$\frac{\eta_0}{H} = 1 - \frac{1}{K} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \frac{H}{h} - \frac{1}{12} \frac{1}{K} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right\} \quad (6)$$

によつてあらわされる。

(3), (4) および (6) 式からわかるように, hyperbolic waves の理論式は, 初等関数であらわされ, H/h および $T\sqrt{g/h}$ が与えられると, $c/\sqrt{gh}$ および η_0/H の値は簡単に求められる。

図-1 および 図-2 は, それぞれ波速と静水面からの波の峯高について, (1), (2) および (5) 式による ノイド波と, (3), (4) および (6) 式にもとづいて hyperbolic waves の理論曲線を示すとともに, Stokes 波と微小振幅波の曲線も同時に比較して示したもので, これらの図から次のことがいえる。

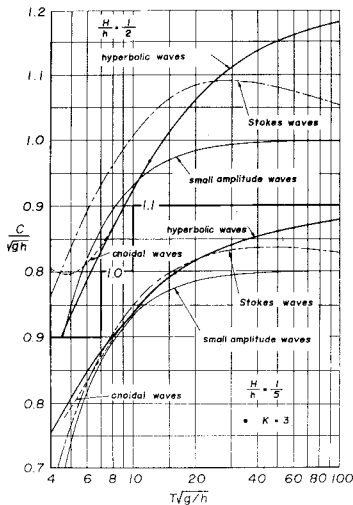


図-1 各理論式による波速の理論曲線

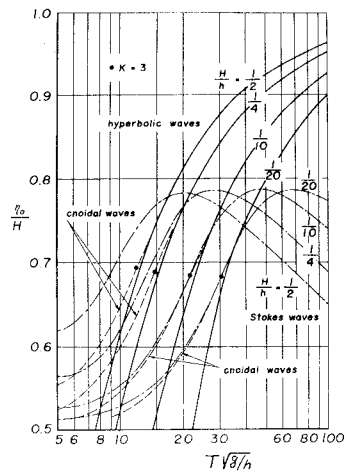


図-2 各理論式による静水面からの峯高の理論曲線

1) 波速は、 $K \geq 3$ の領域 (黒丸で示した点より $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい領域) で、hyperbolic waves とフノイド波の両曲線 (太い実線と破線) は完全に一致し、両曲線が離れ始める点は $K=3$ に対応する $T\sqrt{g/h}$ の値よりかなり小さいところである。

2) 静水面からの波の等高は、 $K=3$ の点ですべてフノイド波の曲線と hyperbolic waves のそれとは離れ始めているが、両者の差は約 3% 程度であり、波速の場合と同様、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなると両曲線は完全に一致するようになる。

3) 波速でも波の等高でも、 $T\sqrt{g/h}$ の値が小さい場合にはフノイド波の曲線は工合が悪くなり、鎖線で示した Stokes 波の曲線も適用しなくてはならないが、 $K=3$ の点は、すべてフノイド波理論が適用され得ない領域である。

4) (したがって、実際に有限振幅波理論を使用する場合には、フノイド波理論は必ずではなく、Stokes 波理論と hyperbolic waves の理論式とで十分である。

3. 水底における圧力波高

hyperbolic waves の理論の応用例の一つとして、水圧式波高計の原理に適用される圧力波高について述べる。

hyperbolic waves の水底における圧力 P_b は

$$\frac{P_b}{\rho g H} = \text{sech}^2(2K\frac{x}{L}) - \frac{3}{4}\frac{H}{h}\text{sech}^2(2K\frac{x}{L})\left(1 + \frac{1}{K}\frac{H}{h}\right)\{1 - \text{sech}^2(2K\frac{x}{L})\} \\ + \frac{3}{4}\frac{H}{h}\text{sech}^2(2K\frac{x}{L})\left(1 + \frac{1}{K}\frac{H}{h}\right)\{2 - 3\text{sech}^2(2K\frac{x}{L})\} + \frac{H}{h} \quad (7)$$

ここに、 L は波長であり、 $x = x - ct$ である。(したがって、圧力波高 $\Delta P_b/\rho g$ は $(P_{b, \text{crest}} - P_{b, \text{trough}})/\rho g$ であるから、上式より次式であらわされる。

$$\frac{\Delta P_b/\rho g}{H} \approx 1 - \frac{3}{4}\frac{H}{h}\left(1 + \frac{1}{K}\frac{H}{h}\right) \quad (8)$$

一方、Stokes 波の圧力波高は

$$\frac{\Delta P_b/\rho g}{H} = 2 \frac{c^2}{gh} \left(\frac{H}{h}\right)^{-1} (F_1 - F_1 F_2 + F_3) \quad (9) \\ F_1 = \frac{2\pi a}{L} \frac{1}{\sinh 2\pi h/L}, \quad F_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2 \frac{1}{(\sinh 2\pi h/L)^4} \\ F_3 = \frac{3}{64} \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^3 \frac{11 - 2 \cosh 8\pi h/L}{(\sinh 2\pi h/L)^7}$$

であり、微小振幅波のそれは

$$\frac{\Delta P_b/\rho g}{H} = \frac{1}{\cosh 2\pi h/L} \quad (10)$$

であらわされる。

図-3 は、これらの理論による圧力波高 $\Delta P_b/\rho g$ と水面波高 H

との比を示したもので、この図から次のことがいえる。ちなみに、波長が長くなると、 $T\sqrt{g/h}$ が大

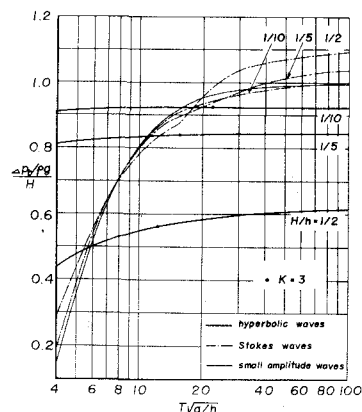


図-3 各理論による
水底の圧力波高曲線

きくなると、微小振幅波理論では $(\phi_0/10)/H$ は 1 に近づき、圧力波高は水面波高と等しくなるが、hyperbolic waves の理論によると、 H/h が大きい場合には両者は等しいと見なされず、圧力波高は水面波高に比べて非常に小さくなる。このことは「うわりのような周期の長い波さ、水深の浅いところ」で、水圧式波高計により観測する場合に注意すべき事柄であつて、微小振幅波理論による (10) 式によつて圧力波高を水面波高に換算すると、波高を小さく見積ることになる。

4. 孤立波の有効波長と有効周期

Munk は浅海域を進行する周期波に、孤立波の理論も適用する場合、水深に対してある波長あるいは周期より長い波に適用すべきで、それより短い波には適用してはいけなかつとし、この限界の波長および周期を、それぞれ有効波長および有効周期と名付けて次式であらわしている。

$$L_{\text{eff}} = \frac{2\pi h}{M} \quad , \quad T_{\text{eff}} = \frac{2\pi}{M} \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (11), (12)$$

ここに M の値は H/h の関数であつて、 $H/h=0$ のとき 0 で、 H/h が大きくなると 1 に近づくと関数である。いま (12) 式を変形すれば、 $T_{\text{eff}}\sqrt{g/h} = 2\pi/M$ となるので、 H/h を与えれば $T_{\text{eff}}\sqrt{g/h}$ の値が求められるので、こゝらの値に対応する hyperbolic waves の特性を計算することができる。表-1 は 1 例として、波速を取上げて $c/\sqrt{gh}$ の値を求めたもので、比較のため孤立波の波速を、(3) 式で $K \rightarrow \infty$ とおいて導かれる

表-1 有効周期に対する hyperbolic waves の波速と孤立波の波速の比較

$\frac{H}{h}$	$T_{\text{eff}}\sqrt{\frac{g}{h}}$	$\frac{c}{\sqrt{gh}}$ solitary w.	$\frac{c}{\sqrt{gh}}$ hyperbolic w.
1/2	7.144	1.213	0.836
1/3	7.939	1.150	0.895
1/4	8.626	1.116	0.917
1/5	9.290	1.094	0.930
1/6	10.02	1.079	0.940
1/7	10.64	1.068	0.948
1/8	11.25	1.060	0.955
1/9	11.89	1.054	0.958
1/10	12.44	1.049	0.963
1/12	13.39	1.041	0.968
1/14	14.18	1.035	0.971
1/16	15.13	1.031	0.975
1/18	16.19	1.027	0.978
1/20	16.97	1.025	0.979

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} - \frac{3}{20} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad (13)$$

によつて計算した結果とこゝに示した。この表から、有効波長あるいは有効周期という概念を用いて浅海域の進行波に孤立波理論を適用すると、かなりの誤差をもたうことがわかる。この例から考へて、有効波長というような概念は適当でなく、波長や周期が長くなつて、Stokes 波の理論が使えない場合には、hyperbolic waves の理論を用ひればよいわけだ。この点から、hyperbolic waves の理論も実際問題に大いに適用すべきである主張したい。最後にこの研究は、文部省特定研究費による研究の一部であることを付記し謝意を表する。