I－191　　鋼桁の最適設計

東京大學工學部　正員　伊藤　學
東京大學大學院　學生員○林　国安

§1　緒言

もっとも適当な設計と言う「最適」(Optimum)の意味にもいろいろあり，一般にそのコストを最小にすることを指すが，重量を最小にすることをいう場合が多く，また一方構造物がもっとも信頼度(Reliability)の高い場合を「最適」と言うこともある。その中で，ここにとりあげた例は鋼桁の重量を与えられた設計条件のもとで最小にすることを対象にしたものである。この問題については既にいくつかの研究があるが，筆者らはその解法に若干の新しい手法を用いた。

最適の数學見地から云えば多変数 $x_i=(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)$ を持つ非線形制約条件 $g_j(x_i)\geq 0$，$(j=1,2,3,\cdots m)$ の内 $f(x_i)$ が最小になる x_i を $f(x_i)$ の最適解と云い，x_{min} における $f(x_{min})$ が最適値と定義される。但し $f(x_i)$，$g_j(x_i)$ が連続で微分可能の上 $f(x_i)$ が凹で，$g_j(x_i)$ が凸でなければならない。かりに n 次元ユークリッド(Euclidean)空間 E_n 内における極点 $x_0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\cdots x_n^0)$ が制約領域 $g_j(x_i^0)\geq 0$，$(j=1,2,3,\cdots m)$ に含まれ且つ n 次元ユークリッド空間 E_n の内におけるすべての他の点 $x_i=(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)$ が $f(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)\geq f(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\cdots x_n^0)$ に満足するならば $x_i^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0,\cdots x_n^0)$ は n 次元ユークリッド空間 E_n の絶対最小解であり，$f(x_i^0)$ は絶対最小値(global minimum)と称される，そうでなければこの極値は局部最小値(local minimum)と定義される。

§2　最適値を求める手法

非線形の制約条件式の下で非線形の目的函数(Objective function)の最適値を求めるのにいろいろな手法が用いられる，大別分類すると

i)　微係数の計算を必要とする方法
ii)　微係数の計算をしない方法(直接法)

等に分けられる。i)の方法としてはSteepest descent法，Newton-Raphson法，Gradient法，CRST法(The Created Response Surface Technique)，Conjugate Gradients法等がある。ii)の方法としてはMonte-Caral法，SUMT法(Sequential Unconstrained Minimization Technique)，それにi)の方法の微係数を計算する代りに近似的に数学計算を行なう方法等がある。

実用上，構造の設計に用いる条件式(Constraints)と目的函数の殆んどが非線形である為 i)の方法で最適値を求めると，変数が多いほど微係数の計算が煩雑の上，計算違いも起り易い。この欠点を補うため今回の研究では ii)の方法を主としMonte-Carolの方法を用いて条件式の領域内における実行可能解(feasible solution)を求め，条件式と目的函数を条件式の持たない連続補助函数 $P(x,r)$ に改め，Powell氏の補間を用いて最適値を求めた。

条件式　$g_j(x_i)\geq 0$，$(i=1,2,3,\cdots n,\ j=1,2,3,\cdots m)$ の下で
$f(x_i)$ を最小にする場合
$P(x,r)=f(x_i)+r\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(x_i)}$ が最小になる様な式に直して最適値を求める。

但し式中のrは摂動パラメータ（Perturbation parameter）

以上の様な方法を用いて鋼桁の断面計算に応用した例を次にあげる，計算に用いた電子計算機はBendix G－20である。

§3　応用例

i)　I型の最適断面

a)　条件式（$g_j(x_i)$）

$$g_1 = 24x_3 + x_5 - x_1 \geq 0$$

$$g_2 = 30x_2 + x_5 - x_2 \geq 0$$

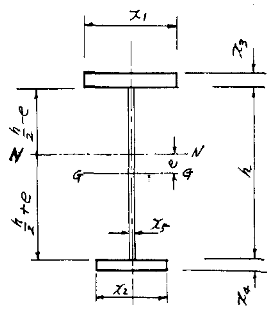
$$g_3 = 160x_5 - h \geq 0$$

$$g_4 = \sigma_{ca} - \beta\left(\frac{l}{x_1}\right)^2 - \frac{M}{Z_1} \geq 0$$

$$g_5 = \sigma_{ta} - \frac{M}{Z_2} \geq 0$$

b)　目的函数（$f(x_i)$）

$$f(x_i) = x_1x_3 + hx_5 + x_2x_4 \longrightarrow min.$$



（図1）

c)　連續摂動函数（$P(x_i, r)$）

$$P(x_i, r) = f(x_i) + r\sum_{j=1}^{5}\frac{1}{g_j(x_i)} \longrightarrow min.$$

但し　r＝摂動パラメータ（Perturbation parameter）

σ_{ca}＝鋼桁の圧縮許容応力（kg/cm²）

σ_{ta}＝鋼桁の引張許容応力（　〃　）

M＝断面の作用モーメント（kg·cm）

h＝桁　高　（cm）

Z_1＝圧縮縁の断面係数（cm³）

Z_2＝引張縁の断面係数（cm³）

β＝鋼材の材質による圧縮応力度の係数

SS41の場合 $\alpha=0.6$，SM50Aの場合 $\alpha=1.1$

l＝固定点間の距離（cm）

A＝鋼桁の断面積（cm²）

$= x_1x_3 + hx_5 + x_2x_4$

e＝腹板の中心から中立軸迄の偏心量（cm）

$=\left[x_1x_3\cdot\frac{(h+x_3)}{2} - x_2x_4\cdot\frac{(h+x_4)}{2}\right]/A$

I＝鋼桁の断面二次モーメント

$=\left[x_5 h^3/12 + x_5\cdot h\cdot e^2 + x_1\cdot x_3\cdot\left(\frac{h}{2}-e+\frac{x_3}{2}\right)^2 + x_2\cdot x_4\left(\frac{h}{2}+e+\frac{x_4}{2}\right)^2\right]$

$Z_1 = I/\left(\frac{h}{2} - e + x_3\right)$

$Z_2 = I/\left(\frac{h}{2} + e + x_4\right)$

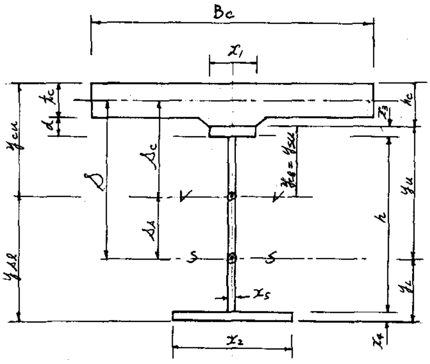
d)　計算結果

Input Data　$M = 32{,}500{,}000^{kg\cdot cm}$，　$\sigma_{ca} = 1800^{kg/cm^2}$，　$l = 500^{cm}$

d－1）最適法による結果	d－2）慣用法による結果
U.－Flg.　4.9 × 2.0　　$A_s = 338.6^{cm^2}$　$y_u = 77.9^{cm}$	U.－Flg.　4.1 × 2.6　$A_s = 344.6$　$y_u = 75.8$
Web. PL.　160.0 × 1.0　　$I_s = 1{,}511{,}385^{cm^4}$　$y_l = 86.7^{cm}$	Web. PL.　160.0 × 1.0　$I_s = 1{,}541{,}677$　$y_l = 88.8$
L.－Flg.　3.1 × 2.6　　$e = 4.1^{cm}$	L.－Flg.　3.9 × 2.0　$e = 6.8$
上フランジ縁の圧縮応力度　$\sigma_c = 1675$（1685）	上フランジ縁の圧縮応力度　$\sigma_c = 1598$（1636）
下フランジ縁の引張応力度　$\sigma_t = 1864$（1900）	下フランジ縁の引張応力度　$\sigma_t = 1879$（1900）
注:（　　）内の数字は許容応力度を示す。	

ii) 合成桁の最適断面

a) 条件式 ($g_j(x_i)$)



(図 2)

$$g_1 = x_1 - b_{uL} \geqq 0$$

$$g_2 = x_5 - t_{wL} \geqq 0$$

$$g_3 = x_3 - 1.0 \geqq 0$$

$$g_4 = 20 \cdot x_3 - x_1 + x_5 \geqq 0$$

$$g_5 = 30 \cdot x_4 + x_5 - x_2 \geqq 0$$

$$g_6 = y_{cl} \geqq 0$$

$$g_7 = x_5 - h/160. \geqq 0 \quad \text{又は} \quad x_5 - 0.9 \geqq 0$$

$$g_8 = 1.25\,({}_s\sigma_{ca} - \beta(l/x_1)^2) - M_D \cdot y_u / I_s \geqq 0$$

$$g_9 = {}_s\sigma_{ca} - M_D \cdot y_u / I_s - M_l \cdot y_{cl} / I_V \geqq 0$$

$$g_{10} = 1.15 \cdot {}_s\sigma_{ca} - M_D \cdot y_u / I_s - M_l \cdot y_{cl} / I_V - N_s / A_s - n_\phi \cdot M_s \cdot y_u / (I_c + n_\phi I_s) \geqq 0$$

$$g_{11} = {}_s\sigma_{ta} - M_D \cdot y_l / I_s - M_l \cdot y_{sl} / I_V \geqq 0$$

$$g_{12} = 1.05 \cdot {}_s\sigma_{ta} - M_D \cdot y_l / I_s - M_l \cdot y_{sl} / I_V + N_s / A_s - n_\phi M_s y_l / (I_c + n_\phi I_s) \geqq 0$$

$$g_{13} = {}_c\sigma_{ca} - M_l \cdot y_{cu} / n I_V \geqq 0$$

$$g_{14} = 1.30 \cdot {}_s\sigma_{ca} - M_D \cdot y_u / I_s - M_l \cdot y_{cl} / I_V - N_s / A_s - n_\phi M_s \cdot y_u / (I_c + n_\phi I_s) - N_t / A_s - M_t \cdot y_u / (n I_s + I_c) \geqq 0$$

$$g_{15} = 1.20 \cdot {}_s\sigma_{ta} - M_D \cdot y_l / I_s - M_l \cdot y_{sl} / I_V + N_s / A_s - n_\phi M_s \cdot y_l / (I_c + n_\phi I_s) - \left| \frac{N_t}{A_s} - \frac{M_t\, y_l}{n I_s + I_c} \right| \geqq 0$$

$$g_{16} = {}_c\sigma_{ca} - M_l \cdot y_{cl} / n I_V + N_s / A_c + M_s (d + \tfrac{t_c}{2} - x_3) / (I_c + n_\phi I_s) - N_t / A_c - M_t (d + \tfrac{t_c}{2} - x_3) / (n I_s + I_c) \geqq 0$$

b) 目的函数 ($f(x_i)$)

$$f(x_i) = x_1 \cdot x_3 + h x_5 + x_2 \cdot x_4 \longrightarrow min.$$

c) 連続擬動函数 ($P(x_i, r)$)

$$P(x_i, r) = f(x_i) + r \sum_{j=1}^{16} \frac{1}{g_j(x_i)} \longrightarrow min.$$

但し

M_D = 合成前断面に作用する曲げモーメント $^{(kg \cdot cm)}$

M_l = 合成後 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 (〃)

B_c = 床版の有効幅 (cm)

t_c = 床版厚 (cm)

S = 鋼桁の重心軸

V = 合成桁の重心軸

h = 桁高 (cm)

d = ハンチ高 (cm)

y_{cu} = 鋼に換算した合成断面の重心軸 (V−V) から床版の上縁までの距離 (cm)

y_{sl} = 鋼に換算した合成断面の重心軸 (V−V) から床版の下縁までの距離 (cm)

h_c = 鋼桁の上縁から床版の上縁までの距離 (cm)

δ_c = 合成断面の重心軸 (V−V) から床版の重心軸までの距離 (cm)

δ_s = 合成断面の重心軸 (V−V) から鋼桁の重心軸 (S−S) までの距離 (cm)

$\delta = \delta_c + \delta_s$

I_s = 鋼桁の断面二次モーメント (cm^4)

I_V = 鋼に換算した總断面二次モーメント (cm^4)

I_c = コンクリートの断面二次モーメント (cm^4)

l = 固定点間の距離 (cm)

${}_s\sigma_{ta}$ = 鋼材の引張許容応力度 (kg/cm^2)

${}_s\sigma_{ca}$ = 〃 〃 〃 圧縮 〃 〃 〃 〃 (〃)

${}_c\sigma_{ca}$ = コンクリートの圧縮許容応力度 (kg/cm^2)

β = 鋼桁の材質による圧縮応力度の係数

y_u = 鋼桁の重心軸(S−S)から桁の上縁迄の距離。(cm)

y_L = 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 下縁迄 〃 〃 〃 。

y_{cl}, y_{su} = 合成断面の重心軸(V−V)から桁上縁迄の距離。(cm)

N_s = クリープによる鋼桁軸力の移行量。

$$N_s = \varepsilon_s \cdot E_s / (n_p/A_c + 1./A_s + n_p \delta^2/(I_c + n_p I_s))$$

ε_s = コンクリートの最終収縮度。

$n_p = n(1 + \varphi_2/2)$

φ_2 = クリープ係数。

n = 鋼材のコンクリートのヤング係数比。

b_{uL} = 下フランジ幅の下限。

t_{wL} = 腹板厚の下限。

E_s = 鋼材のヤング係数.

A_s = 鋼桁の断面積。(cm²)

A_c = コンクリートの断面積。(cm²)

M_s = クリープによる鋼桁分担モーメントの移行量, $M_s = N_s \cdot \delta$。

N_t = 温度差による鋼桁軸力の移行量

$$N_t = \alpha \cdot t \cdot E_s / (n/A_c + 1/A_s + \delta^2/(I_c/n + I_s))$$

α = 鋼材の線膨張係数.

t = 温度差の度数.

M_t = 温度差による鋼桁分担モーメントの移行量, $M_t = N_t \cdot \delta$.

d) 計算結果

Input Data : $M_D = 11{,}843{,}400^{kg\cdot cm}$, $M_\ell = 15{,}240{,}100^{kg\cdot cm}$, $_s\sigma_{ca} = 1800^{kg/cm^2}$, $_c\sigma_{ca} = 60^{kg/cm^2}$, $t_c = 19.^{cm}$, $d = 12.7^{cm}$, $\ell = 442^{cm}$.

(d − 1) 最適法					(d − 2) 慣用法			
U − FLg. 21.0 × 1.5	A_s=228.5	y_u=80.6	N_t= 11,148		U−FLg. 20.0×1.6	A_s=232.6	y_u=81.3	N_t= 12,950
Web. PL. 130.0 × 0.9	I_s=604,369	y_L=52.9	N_s=14,331		Web. PL. 130.0×0.9	I_s= 618,293	y_L= 52.5	N_s =16,316
L − FLg. 40.0 × 2.0	I_v=2,302,060	δ=101.3	e = −14.1		L−FLg. 38.0×2.2	I_v=2,052,184,	δ=92.4	e =−14.7
	D	D + L	D + L+S	D+L+S+T	D	D+ L	D+L+S	D+L+S+T
S_u	1579(1640)	1632(1800)	1886(2070)	2081(2340)	1557(1578)	1672(1800)	1938(2070)	2147(2340)
S_L	1037(2375)	1868(1900)	1931(1995)	1966(2280)	1006(2375)	1885(1900)	1941(1995)	1985(2280)
C_u		36(60)	33(60)	34(60)		38(60)	35(60)	36(60)
C_L		7(60)	1(60)	9(60)		16(60)	11(60)	17(60)

註 : (　　) 内の数字は許容応力度 kg/cm² を示す。

§4 むすび

i) 計算結果からわかるように，求めた解が local であるか global であるかの判別に初期値(x_i^0)を変えて幾回か計算して見なければ判断できない事に問題が残されている。

ii) 攝動パラメータ r の減少方法は本計算で 1.0 から 1/100 づつ 4 段階にわたって減少し $r = 10^{-8}$ まで減少させた。$g_j(x_i) \doteqdot 0$ の場合 $P(x, r)$ は大きい値 (∞) になる事は $P(x, r)$ に対する罰金量がきびしくなる事を意味する。従って r の選擇はなるべく条件式の値を境界からさけて計算すれば収束を早める事ができよう。

iii) この方法を用いた場合，ある問題に対し繰り返し計算の収束が遅い場合もある。

iv) 設計に用いる場合の精度については十分精確な値が得られよう。

なお，今後の問題としては r の選び方，線ベクトルの最小値におけるスカラーの求め方の改良と計算の収束を早める方法，それに Matrix 法による解の求め方及び Conjugate gradient 法による求め方も検討中であり，またこの直接法を各種の構造物の設計に応用することも考えている。最後にこの研究に種々御助言を賜わった法大 大地羊三教授並びに協力を頂いた川田工業K.Kに感謝の意を表します。