

熊本大学 工学部

正員

三 池 亮 次

1. 要 旨

アーテダムの外荷重に対する抵抗の構造形式は、堤体内部のクラックの発生、基礎岩盤の非弾性的挙動などのため、たん水開始後数ヶ月の間に通常生ずる顕著な非弾性的変形が一応安定した以降においても、なお刻々に変動するであろうことは、筆者が先にためみと木佐、温度等諸因子との間の多重重回帰の構造分析に、主成分分析の手法を適用することによって推定したとおりである。

このような多重重回帰の構造変化は、またいりゆる一元配置の理論を重回帰分析に拡張適用することによっても容易に推定できる。すなわち、年度を水準とする資料に対して、各水準毎に最小二乗法により回帰式を求め、次に検定を行おうとする数年度間の資料に対して同じく回帰式を求める。ある年度に他の年度の資料を追加したために、回帰偏差の不偏分散が単年度のそれより著しく大きくなるれば、その年度間に級間変動が、すなわち回帰構造の変化があるものと考えられるのである。この種の解析は、言わば共分散分析として取り扱われるものであるが、とくに多重重回帰における問題であることを強調するため、これを「重回帰における一元配置の手法」と稱することにする。

なお、級間変動の効果を因子 X の中に併合した線型回帰模型に対して共分散分析を行う手法については、すでに中村慶一博士によって理論の展開が試みられているが、ここで用いる方法は、観測変量 y から因子 X の影響を差し引いて一元配置の分散分析を行うもので、容易に回帰係数の級間変動を含む回帰構造の変化が検定される長所をもつものと考えられる。しかし主成分分析による場合のように、回帰係数自身の水準間の変動を検定することができない。

また、重さの異なる加重重回帰における有意性検定の手法を述べ、これを、各水準の分散の異なる場合の一元配置の分散分析に応用した。かくして、加重重回帰における一元配置の手法により、アーテダムの信頼度の検定が可能となるのである。

2. 加重重回帰における有意性検定

重回帰における一元配置の理論を展開するに先立って、線型回帰における回帰偏差の分散の異なる、加重重回帰における有意性検定の理論を検討してみよう。

指定変数マトリクス X とその従属変量ベクトル y との間に

$$y = X\beta + e \quad (1)$$

が成立するものとする。ここに β は偏回帰係数、 e は偏差で

$$\begin{aligned} y' &= [y_1, y_2, \dots, y_n] & e' &= [e_1, e_2, \dots, e_n] & X &= \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\ \beta' &= [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p] \end{aligned}$$

また、各観測の組の重さ $q_1, q_2, \dots, q_n$ に対して重さのマトリクス Q を定義すれば、偏差 e 、および $e e'$ の期待値は、

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n \end{bmatrix} \quad E[e] = 0 \quad E[ee'] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 Q^{-1}$$

ここに、 σ_i^2 ($i=1, 2, \dots, n$) は、第 i 組の回帰偏差の分散であり、 σ^2 は重さ 1 の回帰偏差の分散である。なお、回帰偏差 e は互に独立に母平均 0、母分散 $\sigma^2 Q^{-1}$ の正規分布に従うものとする。すなわち $e \in N(0, \sigma^2 Q^{-1})$ と仮定すれば、加重測定に対しては、残差平方和 $e' Q e$ を最小にする β が β の最良不偏推定量 $\hat{\beta}$ となる。この場合の正規方程式として、次式

$$X' Q X \hat{\beta} = X' Q y \quad (2)$$

を得。したがって $S_y = X' Q X$ とすれば、 S_y が正則であれば、

$$\hat{\beta} = S_y^{-1} X' Q y \quad (3)$$

を、また、残差、 $v = y - X \hat{\beta}$ に対して、残差平方和

$$S_E = v' Q v = y' Q y - \hat{\beta}' X' Q y \quad (4)$$

を得る。

$$\sigma^2 = E \left[\frac{S_E}{n-p} \right] \quad \sigma_i^2 = E \left[\frac{S_E}{q_i(n-p)} \right] \quad \sigma_{\beta_i}^2 = E \left[C_{ii} \frac{S_E}{n-p} \right]$$

であることも容易に証明することができる。ここに $\sigma_{\beta_i}^2$ は、 $\hat{\beta}_i$ の分散であり、 C_{ii} は S_y の逆マトリクス対角に要素である。

つきに、 S_E/σ^2 が、等重の場合と同じく自由度 $(n-p)$ の χ^2 分布に従うから、以下のように加重重回帰における有意性検定を行うことが可能となるであろう。すなわち式(1)における X マトリクスを、因子数 r 個の X_1 と因子数 $p-r$ 個の X_2 に分割すれば、

$$y = X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + e \quad (5)$$

上式において、帰無仮説 $H_2: \beta_2 = 0$ を立てるとき、 H_2 における残差平方和 $Q(H_2)$ に対して $Q(H_2)/\sigma^2$ は、自由度 $(n-r)$ の χ^2 分布 $\chi^2(n-r)$ に従うから、式(4)において $R(\hat{\beta}) = \hat{\beta}' X' Q y$ とするとき、

$$S_E = y' Q y - R(\hat{\beta}), \quad Q(H_2) = y' Q y - R(\hat{\beta}_1) \quad (6)$$

$$\text{したがって} \quad R(\hat{\beta}_1 | \hat{\beta}_1) = Q(H_2) - S_E = R(\hat{\beta}) - R(\hat{\beta}_1) \quad (7)$$

は、 β_1 による効果を除去した後の β_2 の効果を表わし、

$$\frac{R(\hat{\beta}_2 | \hat{\beta}_1)}{\sigma^2} \in \chi^2(p-r) \quad (8)$$

が証明される。

$$\therefore \frac{R(\hat{\beta}_2 | \hat{\beta}_1) / (p-r)}{S_E / (n-p)} \in F(p-r, n-p) \quad (9)$$

ただし、 $F(p-r, n-p)$ は自由度対 $(p-r, n-p)$ の F 分布である。そして r 分割したモデルに対する上表のと

A O V 表

SV*	SS**	DF***	MS****	F
$H_1: \beta = (\beta_1, 0)$	$R(\hat{\beta}) = \hat{\beta}' X' Q y$	r	$R(\hat{\beta}_1)/r$	$R(\hat{\beta}_1)/r$
$H_2: \beta = (\beta_1, \beta_2)$	$R(\hat{\beta}) = \hat{\beta}' X' Q y$	$p-r$	$R(\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1)/(p-r)$	$\frac{R(\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1)/(p-r)}{S_E/(n-p)}$
残差	$S_E = y' Q y - R(\hat{\beta})$	$n-p$	$S_E/(n-p)$	
T	$y' Q y$	n		

* SV: 変動要因 ** SS: 平方和 *** DF: 自由度 **** MS: 不偏分散

おりの ADV 表 か、等重重回帰の場合に依り誘導することが出来る。

3. 加重重回帰における一え配置の理論

観測変量 y の真の値を μ とし、偏差を e° とすれば、

$$y = \mu + e^\circ \quad (10)$$

つぎに、資料を m 個の水準に分割し、

$$\mu' = [\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_m'] \quad y' = [y_1', y_2', \dots, y_m'] \quad e^{\circ'} = [e_1^{\circ'}, e_2^{\circ'}, \dots, e_m^{\circ'}]$$

とする。単変量の場合は、 μ は一般にすべての水準に対して同一である。しかし μ が因子 X と重回帰の関係にあるとき、 μ は因子 X によって、したがってまた各水準によって異なった値となり、

$$\mu_i = [\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{i,m_i}] \quad y_i' = [y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i,m_i}] \quad e_i^{\circ'} = [e_{i1}^{\circ'}, e_{i2}^{\circ'}, \dots, e_{i,m_i}^{\circ'}]$$

である。この幾つかに分割された観測変量 y_i の真の値が、実は $\mu_i + \alpha_i$ であったとする。したがって、いま、 $\alpha_i' = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i,m_i}]$ $e_i' = [e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{i,m_i}]$ $\alpha' = [\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_m']$ $e' = [e_1', e_2', \dots, e_m']$ とし、式 (10) における μ の推定値を $\hat{y}$ 、残差を v° とするとき

$$y_i = \mu_i + \alpha_i + e_i \quad (11)$$

$$y = \hat{y} + v^\circ \quad (12)$$

式 (11) に対して、 α_i の推定値を $\hat{\alpha}_i$ 、残差を v_i とするとき

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{\alpha}_i + v_i = \hat{y}_i + v_i \quad (\hat{y}_i = \hat{y} + \hat{\alpha}) \quad (13)$$

$$\therefore v^\circ = \hat{\alpha} + v \quad (14)$$

$$\therefore v^{\circ'} Q v^\circ = \hat{\alpha}' Q \hat{\alpha} + v' Q v + 2 \hat{\alpha}' Q v \quad (15)$$

ここに Q は各水準の重さを表わすマトリクスで、次のように定義されるものとする。

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & q_2 & \\ 0 & & q_m \end{bmatrix} \quad q_i = \begin{bmatrix} q_{i1} & & 0 \\ & q_{i2} & \\ 0 & & q_{i,m_i} \end{bmatrix}$$

さて $\hat{y}$ あるいは $\hat{y}$ を、重回帰における従属変量 y の全資料あるいは各水準毎の推定値とし、 y より $\hat{y}$ あるいは $\hat{y}$ を差し引いた残差について考える。ちやわち y と X との間に式 (1) に依り

$$y = X \beta^\circ + e^\circ \quad (16)$$

なる回帰関係が成立する場合には、 β° の不偏推定値 $\hat{\beta}^\circ$ および重さのマトリクス Q° に対して

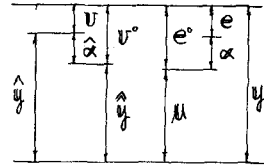
$$X' Q^\circ X \hat{\beta}^\circ = X' Q^\circ y \quad \hat{y} = X \hat{\beta}^\circ \quad v^\circ = y - \hat{y} \quad (17)$$

が成立する。観測変量を m 個の水準に分割し、 i 番目の水準に対して

$$y_i = X_i \beta_i + e_i \quad (18)$$

である場合には、同様に、

図-1. 重回帰における級間変動の効果を示す図



$$X_i' X_i \hat{\beta}_i = X_i' y_i \quad \hat{y}_i = X_i \hat{\beta}_i \quad u_i = y_i - \hat{y}_i \quad (19)$$

ここに

$$\beta^0 = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \\ \beta_2^0 \\ \vdots \\ \beta_p^0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad X_i = \begin{bmatrix} X_{i11} & X_{i12} & \dots & X_{i1p} \\ X_{i21} & X_{i22} & \dots & X_{i2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{in1} & X_{in2} & \dots & X_{inp} \end{bmatrix}$$

この場合にも、もし級間変動が存在するものとして、式(15)がそのまま成立し、かつ定数項を含む回帰式に対して $\sum_j u_{ij} = 0$ であることが証明されるから $\sum_{j=1}^m q_i u_{ij} = 0$ であり、 $\alpha_i' = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ip}]$ の仮定の成立するときは、 $\alpha' Q u = \sum_i \alpha_i' q_i u_i = \sum_i \hat{\alpha}_i' \sum_j q_{ij} u_{ij} = 0$ となり、式(15)は

$$u^0' Q u^0 = \hat{\alpha}' Q \alpha + u' Q u \quad (20)$$

となる。式(20)の左辺は全変動、右辺第1項は、級間変動、第2項は級内変動である。

さて、式(11)において、 $\alpha_i = 0$ の仮設を設けると $e = e^0$ 、 $Q = Q^0$ となり、重さ Q を用いて式(4)に従い計算される全変動 S_{E0} は、 $\sigma^2 X^2(n-p)$ に従い、また

$$S_{EEi} = y_i' q_i y_i - \hat{\beta}_i' X_i' q_i y_i \quad (21)$$

とすると、 $S_{EEi}/\sigma^2 \in \chi^2(n_i - p)$ であるから、級内変動 $S_{EE} = \sum_{i=1}^m S_{EEi}$ に対して

$$\frac{S_{EE}}{\sigma^2} \in \chi^2(n - mp) \quad (22)$$

$$\therefore \frac{S_{E0}}{\sigma^2} = \frac{S_{E0} - S_{EE}}{\sigma^2} \in \chi^2(m-1, p) \quad (23)$$

$$\therefore \frac{S_{E0}}{(m-1)p} \bigg/ \frac{S_{EE}}{n-mp} \in F(m-1, p, n-mp) \quad (24)$$

を得る。ここに S_{E0} は級間変動であり、式(24)左辺 F の値が有意水準 5% における自由度対、 $(m-1, p, n-mp)$ の F 値、 $F_\alpha(m-1, p, n-mp; 0.05)$ より大きい場合 $\alpha = 0$ の仮設は棄却され、各水準の間に差異があると判定される。

4. 加重重回帰における一え配置の手法によるアーテグムの信頼度の検定

解析の一例は下表のとおりであり、 F_0 欄 * 印は級間変動の存在を示すのであるが、この級間変動はまた、各水準を通して解析した場合の不偏分散の平方根 $\sqrt{V_{E0}}$ が、各水準毎に解析した場合のそれの $\sqrt{V_E}$ より、大きくなることから推定できるとおりである。詳細は講演会において報告する。

表-1 競北グムの加重重回帰における一え配置分散分析表

年度	不偏分散の平方根		全変動		級内変動				級間変動		F	
	$\sqrt{V_{E0}}$	$\sqrt{V_E}$	S_{E0}	P_{E0}	S_{EE}	N_{EE}	P_{EE}	$S_{EE}/N_{EE}-P_{EE}$	S_{EA}	$S_{EA}/P_{EA}-P_{E0}$	F_0	F_α
昭和 35	0.627	0.428										
36	1.140	0.778	22.41	8	8.97	65	16	0.183	13.44	1.68	9.77*	2.14
36	1.470	0.778										
39	0.877	0.464	30.09	8	6.95	54	16	0.183	23.14	2.89	15.81*	2.16

本研究を行うにあたり、御指導、御教示を受けた、熊本大学工学部、福井武弘教授、理学部、福業三男教授、土木研究所、中村慶一博士に謝意を表する、なお参考文献は講演会当日紹介する。