I－188　　杭基礎の振動減衰性についての波動論的考察

東京工業大学　　伯野元彦

§1. はじめに

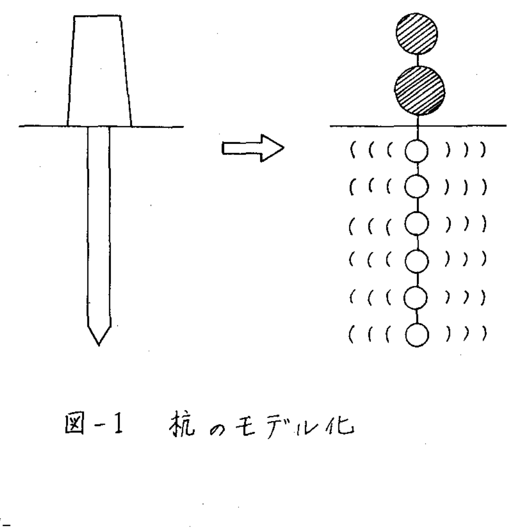
構造物の耐震性を考える上で、構造物基礎が最も重要なポイントとなっていることは、今更言うまでもない事であるが、それにも拘らず基礎の動的特性については未だに不明な点が多々ある。過去の研究者が実験的に理論的に色々の積み重ねを行って来たが、理論的な分解でそれらを大別すれば、基礎の振動系を質量とバネとダッシュ・ポットの集まりと見るか、弾性体上あるいは中にある系の振動を波動論的に解明するかの二つの行き方に分け得ると思う。勿論それぞれの研究方法には、特徴があり、長所、短所を持っているが、前者は計算が容易だが、バネ係数等の定数をいかに定めるかが難かしい事、後者は境界条件を満足する解を見出すことが困難な場合が多いが、解を求めることができさえすれば、構造物の実際の振動解により近いと考えられるという長所がある。

そして、質量バネ系と考える場合には、バネを支える剛体壁の存在を仮定しなければならない。この点が実際の構造物基礎の境界条件と大いに異なっているところである。そのため、基礎振動系の振動減衰性としてダッシュポットを入れるが、そのダッシュポットの減衰の性質が、杭から波動としてエネルギーが逃げて行くことによる振動減衰性と同じ性質であるか否かなどについては、何ら解明されていない。建築物のベタ基礎から波動としてエネルギーが逸散して行く現象に関してはReissner、鳥海、田治見、小堀などの研究があり、杭に関しては田治見ならびに同様な小坪の論文がある。これらのうち、ベタ基礎の弾性波動論的考察は或る程度完成の域に達しているといってよいであろう。杭の振動に関しては、特殊な境界条件の場合のみ解かれて居り、未だしの感がある。

本研究は、杭の振動に関して従来の研究とは全く異なった、しかも応用範囲の広いと思われる方法によって解析できることを明らかにしようとした。

§2. 地中構造物の振動の一般的解法

筆者の考え方は、図－1に説明してある。つまり、どのような地中構造物であろうと、地上構造物の場合によく用いられる串団子型モデルに置換することは容易である。ただし、その場合、この串団子にはバネ、ダッシュポットは不要である。この団子1個1個から弾性波が逃げて行くとするのである。



図－1　杭のモデル化

このようにモデル化すれば、次のような種々の利点が得られる。

(i) 図－1から明らかなように地上構造物と

地中構造物を同一のモデルで結合することができる。　この場合地上構造物からは弾性波逸散の無い事は勿論である。

(ii) このモデル化は、地中構造物が如何なる形状であっても、例えば、斜杭、ケーソン，群杭等であっても実行は容易である。

結局、本研究で提案したい解析方法は次の順序で行なわれることとなる。

(i) 地上を含めた構造物の串団子モデル化。

(ii) 地下の串団子存在位置での地下一点加振解の求解。　それによって複素バネ常数の決定。

(iii) 串団子と複素バネ常数による振動方程式の作製ならびに求解。

このように、本解法では地下のある深さにおいて、振動力を加えた時の振動特性（複素バネ常数）の決定が最も重要な点となるので、以下その求め方を述べる。

§3　半無限弾性体中における点加振の解。

表記の問題に最初に取組んだのは、H. Lamb (1903) であるが、彼に刺戟を受けて日本でも主として地震学者が多くの研究を行った。　それらの研究は何れも加振点の力の状態が純変容的（爆発のような場合）か純剪断状態であった。

我々の欲しいのは振動源の加振点が或る方向に振動している場合の解である。　筆者の知り得る限りでは、その解は未だに求められていない。

求解の方法は次の順序による。　水平加振の場合に例をとって述べる。

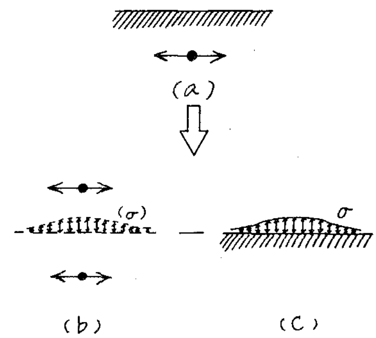


図-2　地中一点加振の解析法

(i) 加振の状態は図-2 (a) のようであるが、これを図-2 (b) と (C) の状態に分解する。

(ii) 無限弾性体中の一点での一方向振動力による解は求められているので、その点加振力を図-(b)の破線を半無限の場合の自由表面の位置として、図-(b)に示してあるように、点加振の位置と、それに自由表面を軸として、対称点の位置との二点に置く。　こうすることにより、無限体中の破線の位置には剪断応力は働らかないこととなる。　ただし、直応力は生じた状態である。

(iii) (ii)のプロセスで図-(b)の破線上に生じている直応力によって、弾性体中に生じている応力状態を差し引けば、所要の解が得られる筈であるが、それには、破線上に生じている直応力と反対符号の直応力を半無限弾性体上に加えた場合の弾性体中の応力状態を加え合わせればよい。

(i)(ii)(iii)の順で解を求めて行こう。

<u>無限弾性体中の一点加振解</u>

振動方程式は次の通りである。

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u \quad , \quad \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v \qquad \text{-----} \quad (1)$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w$$

ここに　$\Delta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$　，　u：x軸方向変位，v：y軸方向変位，w：z軸方向変位

$\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$　　ρ：弾性体の単位体積当り質量，λ，μ：Laméの常数

いま　$(\nabla^2 + h^2)\phi = 0$，　$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$　を満足するような　ϕ，ψ　をとれば，変位u，v，wは次のようにϕ，ψによって表わされる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi \qquad \cdots\cdots (2)$$

ここに　$h^2 = p^2 \rho / (\lambda + 2\mu) = p^2 / V_p^2$，　$k^2 = p^2 \rho / \mu = p^2 / V_s^2$

V_p：P波の速度，　V_s：S波の速度

$\phi = A e^{-\alpha z} J_0(\xi \varpi)$，$\psi = B e^{-\beta z} J_0(\xi \varpi)$　の形の解を仮定し，（$\varpi = \sqrt{x^2 + y^2}$）

$z = 0$の面で，$[p_{zz}]_{z=+0} - [p_{zz}]_{z=-0} = -Q \cdot J_0(\xi \varpi)$　という絶対値を持つ直振動応力を加えるという境界条件でϕ，ψの未知数を定めれば次のように与えられる。

$$\phi = Q e^{-\alpha z} J_0(\xi \varpi) / 2k^2 \mu, \qquad \psi = Q e^{-\beta z} J_0(\xi \varpi) / 2k^2 \mu \beta$$

さらに$z = 0$面上に作用している集中加振力　$R e^{i\omega t}$を　$e^{-\alpha z} J_0(\xi \varpi)$　等で展開すれば，結局集中加振力$R e^{i\omega t}$による解　ϕ，ψ　は次式のように定められる。

$$\phi = \frac{R}{4\pi p^2 \rho} \int_0^\infty e^{-\alpha z} J_0(\xi \varpi) \xi d\xi = -\frac{R}{4\pi p^2 \rho} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-ihr}}{r}$$

$$\psi = \frac{R}{4\pi p^2 \rho} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta z}}{\beta} J_0(\xi \varpi) \xi d\xi = \frac{R}{4\pi p^2 \rho} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}$$

(3)式のϕ，ψから(2)式を用いて弾性体内任意の点の振動変位，その結果振動応力等も求め得る。勿論，加振点における変位は発散してしまって求め得ないが，これは集中荷重なので当然の事である。

図－2(c)の自由表面上に直振動応力が作用した場合の解

(i)$x = 0$，$y = 0$の点に$N da e^{ipt}$というz方向振動荷重が作用した時の解。

妹沢博士の導かれた三次元円筒座標による弾性波動解を用い鳥海博士等の手法を用いると，任意点の変位，u，v，wは次のように与えられる。

$q^2 = \alpha^2 + l^2 + \beta^2 + f^2$，　$l = p/V_p$，　$f = p/V_s$，　$F(q) = (2q^2 - f^2)^2 - 4\alpha\beta q^2$

とした時，

$$\left.\begin{aligned} u = v &= \frac{N da}{2\pi\mu} \int_0^\infty \left\{ q^2 \left(2q^2 - \frac{p^2}{\beta^2}\right) e^{-\alpha z} - 2q^2 \alpha\beta e^{-\beta z} \right\} \frac{J_1(q\varpi)}{F(q)} dq \\ w &= \frac{N da}{2\pi\mu} \int_0^\infty \left\{ \alpha q \left(2q^2 - \frac{p^2}{\beta^2}\right) e^{-\alpha\beta} - 2\alpha q^3 e^{-\beta z} \right\} \frac{J_0(q\varpi)}{F(q)} dq \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4)$$

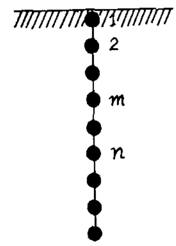
(ii)自由表面上に$f(x, y) e^{ipt}$という直振動応力が作用した時の解。

(4)式を積分すればよいわけであるから，uに例をとれば次のようになる。

$$u = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \int_0^\infty \left\{ q^2 \left(2q^2 - \frac{p^2}{\beta^2}\right) e^{-\alpha z} - 2q^2 \alpha\beta e^{-\beta z} \right\} \frac{J_1(q\sqrt{x^2 + y^2})}{F(q)} dq\,dx\,dy \qquad \cdots\cdots (5)$$

§4. モデル化された杭の振動方程式

以上のようにして、図－2(b)の状態の解と図－2(c)の状態の解が求められたので、結局、半無限弾性体の深さZ_0に点振動源が存在した場合の弾性体中任意の点の変位、応力その他が求められることになる。　いま図－3において、m点に加振点があり、そこに振幅1という大きさの振動力が働らいていたとする。　そして、加振点そのものの位置における変位は∞となり求められないので、加振点から杭の半径だけ離れた位置における変位を採用するとかの便法を考えて、次のように変位U_mが与えられたとする。



図－3 杭の振動方程式

$$1_m = K_m \cdot U_m \qquad \text{------} \quad (6)$$

ただし、U_mは通常複素数となる。　K_mはバネ常数の単位を持っている筈であるが、U_mが複素数なので、これまた複素数である。

そして、静的な場合とこのバネ常数が本質的に異なる点は、振動数Pの関数であるという点である。つまり、バネ常数とは言えないのかも知れない。

さらに(6)式で与えられたK_mは杭の振動を論ずる場合には、静的な構造物を解く場合と同様 Stiffness Matrixの一要素に過ぎないのである。　つまり、m点に1という点加振を行った場合、他の杭上の位置n点も振動変位を生じるためである。

いま、m点に絶対値1の点加振力があった時のn点の変位をU_{mn}と表わすと、複数バネ常数K_{mn}は次のように表わされる。

$$K_{mn} = 1 \,/\, U_{mn} \qquad \text{------} \quad (7)$$

そして、K_{mn}を用いて杭の振動方程式は(8)式で与えられる。

$$\rho_s \frac{\partial^2 y_m}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y_m}{\partial x^4} + \sum K_{mn}\, y_n = f(t) \qquad \text{-----} \quad (8)$$

(8)式を串団子の数だけの階差方程式に変形すれば、複素連立1次方程式となり解き得ることとなる。

数値計算

地下一点加振の解を求めるためには、地表面に直振動応力をかけた時の解（(5)式）が求められなければならないが、$F(\xi)$が0となるξの値は特異点となるため（5）式の積分は、複素積分を用いるのが普通である。　しかし、$f(x, y)$が複雑な関数であるし、$F(\xi)$の性質として特異点の前後で符号が変るので、その性質を利用し数値積分を行って解析を実行している。　計算例については、講演会当日に発表する予定である。

参考文献

H. Lamb　"On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid" Philosophical Transactions, A, vol. 203, 1904, pp 1～42

I. Toriumi　"Vibration in Foundation of Machines", Technical Report of Osaka University, 5, NO. 146

田治見宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について，日本地震工学シンポジウム(1966) PP 255～260