

京都大学工学部

正員 後藤尚男

京都大学防災研究所

正員 土岐憲三

京都大学工学部

正員 〇秋吉 卓

1. まえがき 構造物基礎の耐震設計において、地中に埋設されている基礎体が円形断面を持つ場合の詳細な理論的取扱いはすでに田沼見教授によって発表されている¹⁾。しかるにこの解析においては基礎体の断面の差異が応答に及ぼす影響を知らなくてはならない。そこでわれわれは楕円形断面を持つ基礎体が楕円の短軸または長軸方向という特定方向から定常的な外力を受けるときの応答解析についてすでに発表し²⁾、これとさらに広範囲の地震応答の検討が可能とするため、今回は楕円形断面を持つ基礎体が任意方向から周期的外力を受けるときの応答解析およびその数値計算例の一部を報告する。

2. 運動方程式とその解 対象とする表層および基礎は等方向弾性体とし、上下方向の変位は水平方向の変位に比べて小さいとしてこれを無視する。また剛基礎体は回転の中心がその下端底面の中心にあって、外力の方向と直角な方向とする。いま基礎より $u_3 = u_0 e^{i\omega t}$ という外力が楕円の長軸（x軸）と θ_0 の角度で入射するときの表層の運動方程式は次のように書ける。

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial (\tilde{\omega}_y)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \rho u_0 \omega^2 e^{i\omega t} \cos(\theta - \theta_0) \quad \text{---- (1)}$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} - 2\mu \frac{\partial (\tilde{\omega}_y)}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_x}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \rho u_0 \omega^2 e^{i\omega t} \sin(\theta - \theta_0) \quad \text{---- (2)}$$

ここに、 Δ : dilatation, $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$: rotations, $l = k\sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}$, $k = \sqrt{a^2 - b^2}$, λ, μ : Lamé の定数, ρ : 表層の密度, u_0 : 基礎の最大振幅, a, b : 楕円形断面の長径と短径, u_3, u_y : x, y 方向の変位。

ところで $\sin \theta = k \cosh \xi \sin \eta / l$, $\cos \theta = k \sinh \xi \cos \eta / l$ なる関係を用いて、 $z = H$ (地表面) で $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ を満足する式 (1), (2) の解として次のものをうる。

$$u_3 = \frac{1}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} [C_m \dot{N}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta_1) s_{e,2m+1}(\eta - \eta_2, \eta_1) + C_m \dot{M}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta_1) c_{e,2m+1}(\eta - \eta_1, \eta_1) - D_m \dot{M}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta_2) c_{e,2m+1}(\eta - \eta_2, \eta_2) - D_m \dot{N}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta_2) s_{e,2m+1}(\eta - \eta_2, \eta_2) - \frac{4\mu_0 k}{m\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{u_0} \right)^2 (\sinh \xi \cos \eta \cos \theta_0 + \cosh \xi \sin \eta \sin \theta_0)] \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad \text{---- (3)}$$

$$u_y = \frac{1}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} [C_m \dot{N}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta_1) s_{e,2m+1}(\eta - \eta_2, \eta_1) + C_m \dot{M}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta_1) c_{e,2m+1}(\eta - \eta_1, \eta_1) + D_m \dot{M}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta_2) c_{e,2m+1}(\eta - \eta_2, \eta_2) + D_m \dot{N}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta_2) s_{e,2m+1}(\eta - \eta_1, \eta_2) + \frac{4\mu_0 k}{m\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{u_0} \right)^2 (\cosh \xi \sin \eta \cos \theta_0 - \sinh \xi \cos \eta \sin \theta_0)] \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \quad \text{---- (4)}$$

ここに、 $\dot{M}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta)$, $\dot{N}_{e,2m+1}^{(\omega)}(\xi, \eta)$ 等は modified Mathieu functions, $c_{e,2m+1}(\eta, \eta)$, $s_{e,2m+1}(\eta, \eta)$ 等は Mathieu functions であり³⁾、ドットを付したものはその関数の微分形である。 $C_m, \dot{C}_m, D_m$ および $\dot{D}_m$ は積分定数である。さらに $u_0 = v_0 \cdot \pi / 2H$, $\xi_m^2 = (\omega / u_0)^2 - m^2$, $\eta_1 = (k\omega_0 / 2v_0)^2 \xi_m^2$, $\eta_2 = (k\omega_0 / 2v_0)^2 \xi_m^2$, $v_0^2 = \mu / \rho$, $v_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$, $\eta_1 = \tan^{-1}(\tanh \xi_0 \tan \theta_0)$, $\eta_2 = -\tan^{-1}(\tanh \xi_0 \cot \theta_0)$ 。このとき楕円柱の表層より受ける車輪側モーメント M は

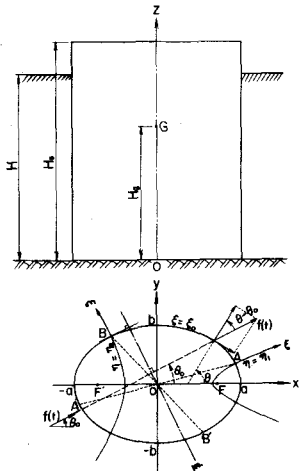


図1 モデルと外力の方向

$$M = - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \rho \pi a b \left(\frac{2H}{m\pi} \right)^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}} \omega_y^2 \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} + \frac{4u_0}{m\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_y} \right)^2 \right\} \Gamma_m e^{i\omega t} \quad \text{---- (5)}$$

ただし、 $\Gamma_m = \Omega_m \sin^2 \theta_0 + \Lambda_m \cos^2 \theta_0$ 、 φ_0 : ロッキング回転角。このとき剛基硬体に関する運動方程式はロッキングのはね定数を k_R 、慣性モーメントを I とすると

$$I \ddot{\varphi} + k_R \varphi = m_0 u_0 \omega^2 H_y e^{i\omega t} + M \quad \text{---- (6)}$$

いま式(6)の解を $\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$ として次の置換を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\xi_m^2}{m^4} \Gamma_m}{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\Gamma_m}{m^2}} &= f_1 + i f_2, & \frac{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \Gamma_m}{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\Gamma_m}{m^2}} &= g_1 + i g_2, \\ \chi &= -\frac{C^*}{4} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{H}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\Gamma_m}{m^2} \frac{1}{J(\theta_0)}, & \frac{\omega_y}{\omega} &= 2C^* \sqrt{\frac{H}{a}} \sqrt{\frac{J(\theta_0)}{J(\theta_0) + 1/3}}, \\ J(\theta_0) &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{a}{H} \right)^2 \cos^2 \theta_0 + \left(\frac{b}{H} \right)^2 \sin^2 \theta_0 \right], & i_0 &= \frac{I}{m_0} \end{aligned} \right\} \quad \text{---- (7)}$$

これより剛基硬体頂部の応答倍率 $\chi(H)$ は次式で与えられる。

$$\chi(H) = \left| \frac{\varphi_0 H + u_0}{u_0} \right| = \left| 1 + \frac{H H_y \left(\frac{\omega_y}{\omega} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \chi(g_1 + i g_2)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_y} \right)^2 + \chi(f_1 + i f_2)} \right| \left(\frac{\omega}{\omega_y} \right)^2 \quad \text{---- (8)}$$

$$\Omega_m = \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{\omega}{\omega_y} \right)^2 \frac{M_0(\xi_0, \theta)}{M_0(\xi_0, \theta)} + \frac{a}{b} \left(\frac{\omega}{\omega_y} \right)^2 \frac{N_0(\xi_0, \theta)}{N_0(\xi_0, \theta)} - 2A_1^{(m)} B_1^{(m)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(m)} B_{2r+1}^{(m)}}{\frac{M_0(\xi_0, \theta)}{M_0(\xi_0, \theta)} \frac{N_0(\xi_0, \theta)}{N_0(\xi_0, \theta)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(m)} B_{2r+1}^{(m)} \right)^2} \quad \text{---- (9)}$$

また Λ_m は Ω_m において θ_1 と θ_2 を互に入れ換えたものである。

なお、 $\xi_m^2 = (\omega/\omega_y)^2 - m^2 < 0$ のときは、 $M_0(\xi_0, \theta)$ 、 $N_0(\xi_0, \theta)$ のかわりに $F_0(\xi_0, -\theta)$ 、 $G_0(\xi_0, -\theta)$ を用いなければならぬ。

3. 数値計算結果とその考察

定数 $C^* = 0.02$ 、 $C_2^* = 1$ および $H_3 = H = 2H_y$ に固定して数値計算を行なった。図2のように外乱

が長軸方向に近うほど系の固有振動数に対応したところの共振が顕著であり、短軸方向に近うほどその共振現象は不明確になって、かつ表層の共振の影響を大きく受けることが分る。図3においては外乱の方向が一定のときは系の固有振動数が表層の固有振動数に近づくときそれだけ系の固有振動数に対応した共振は大きくなるが、遠ざかるとその共振は小さくなる。図4においては断面および外乱の方向が一定のときは、表層が薄くなると基盤の影響は大きくなり、その反面表層の共振による影響は小さくなる。一般に系の固有振動数は地盤中では高くなる傾向が見られるが、水中構造物のそれと著しく異なっている。その他の計算結果と考察は講演時に仰ずる。数値計算は京大電子計算機KDC-II によった。

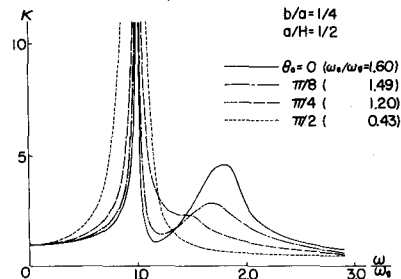


図2 周波数応答曲線

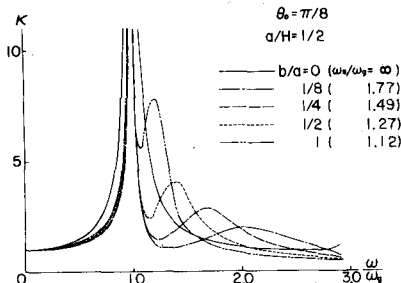


図3 周波数応答曲線

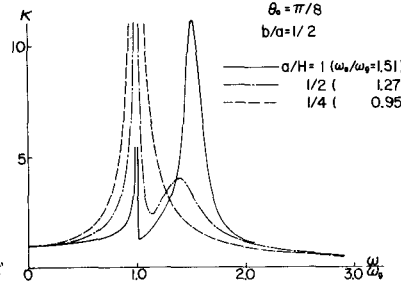


図4 周波数応答曲線

1) 田泊良宏: 深い基礎を有する構造物の地震応答について, 日本地震工学会シンポジウム(1966) 講演集, pp. 41, 10.

2) 佐藤尚男, 土岐豊三, 秋吉 卓: 弾性地盤中にある楕円形基礎の振動性状, 京都大学防災研究所年報第11号A, pp. 43, 3.

3) McLachlan, N.W.: Theory and Application of Mathieu Functions, 1964, Dover.