

東大生研 正員 久保慶三郎

大学院 学生員 松本徳久

1. はしがき

本論文は図-1のような形状の曲線桁橋の動的特性を実験と数値解析によって解明しようとしたものである。この問題に関しては多くの研究が発表されているが、本論文は主として振動時における

1. 曲線桁に吊材を付け、吊構造とした場合の特性
2. 沓に生ずる反力
3. 可動沓の可動方向が構造系全体に与える影響

等を調べることを目的としている。

図-1において、B、C点はヒンジ支承で、A点は可動支承であり、D点は吊材によって上から吊られている。実験模型としてAB部分の単純桁とABC部分の連続桁の2種類に分けて作り、主として単純桁の方を実験した。計算は曲線桁を直線梁の集合したものと考えて、水平面内、鉛直面内の自由振動と、水平面内の強制振動の数値解析をおこなった。

2. 実験

模型としては真鍮を材料として縮尺 $1/100$ のものを使った。模型の断面は図-2に示さる如く1箱桁で四隅の角材は模型製作上の必要から入れた。又、模型の固有振動数を下げるために鉛の錘を 100.8g の強度で載荷した。図-3に示される可動沓および固定沓に相当する模型に、抵抗線歪計を貼り予め静的荷重で荷重と歪の関係を検定しておき沓反力を測定した。強制振動の実験は模型をフレームに取り付け、そのフレームを振動台に乗せて上下、水平方向に正弦波状入力を与えて加振した。水平面内の加振は模型を 30° ごとに回転して入力波の方向を変えた。入力波の振動数は $10\sim 50$ サイクルの範囲で変え、加速度の大きさは振巾を調整することによって約 $0.3g$ に保った。

3. 理論

主な記号 T: 運動エネルギー, U: 歪エネルギー, P: ポテンシャルエネルギー,

[K]: 剛性マトリックス, [M]: 質量マトリックス, q : 一般化座標による変位, Q: 一般化された力

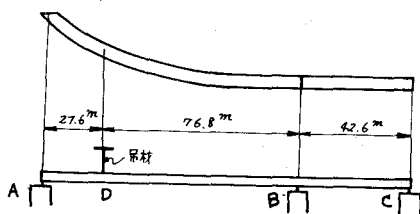


図-1

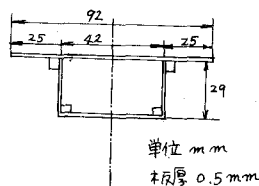


図-2

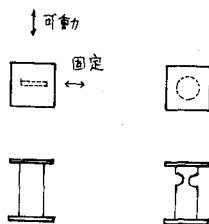


図-3

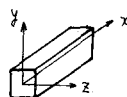


図-4

$u, v, w, \quad (x, y, z)$ 座標における変位

ここでは図-1のような曲線桁が有限個の梁要素の集合したものと考えて、その梁要素の剛性マトリックス¹⁾と質量マトリックス²⁾をエネルギーの理論から導く。

要素内の変位状態を仮定する変位函数を $\{A\}$ 、未知定数を $\{\alpha\}$ とすると要素内の変位 $\{d\}$ は

$$\{d\} = \{A\}\{\alpha\} \quad (1)$$

たとえば、図-4において $x-y$ 平面上にのみ変形する場合を考えると

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x - y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

$$v = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \quad (3)$$

一般化された変位を次のように定める。

$$x=0, y=0 \text{ において } u = \delta_1, v = \delta_2, \frac{\partial v}{\partial x} = \delta_3$$

$$x=l, y=0 \text{ において } u = \delta_4, v = \delta_5, \frac{\partial v}{\partial x} = \delta_6$$

歪 $\{E\}$ と未知定数 $\{\alpha\}$ 、応力 $\{\sigma\}$ と歪 $\{E\}$ 、未知定数 $\{\alpha\}$ と一般化された変位 $\{\delta\}$ の関係を

$$\{E\} = \{B\}\{\alpha\}, \quad \{\sigma\} = \{D\}\{E\}, \quad \{\alpha\} = \{C\}\{\delta\} \quad (4) \sim (6)$$

とすると要素内の歪エネルギー U は

$$U = \int \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{E\} dV = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \{K\} \{\delta\} \quad (7)$$

ただし

$$\{K\} = \{C\}^T \int \{B\}^T \{D\} \{B\} dV \{C\} \quad (8)$$

又、運動エネルギー T は $\{\dot{d}\} = \{L\}\{\dot{\delta}\}$ とすると

$$T = \int \frac{1}{2} m(x, y, z) \{\dot{d}\}^T \{\dot{d}\} dV = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T \{M\} \{\dot{\delta}\} \quad (9)$$

$$\text{ただし } \{M\} = \int m(x, y, z) \{L\}^T \{L\} dV$$

要素に働いている力 $\{F\}$ のポテンシャルエネルギー P は一般化座標 $\{\delta\}$ によって

$$P = -\{Q\}^T \{\delta\} \quad (10)$$

以上の要素内の全エネルギー $U + T + P$ が最小となることから

$$\{K\}\{\delta\} + \{M\}\{\ddot{\delta}\} = \{Q\} \quad (11)$$

更に減衰により散逸されるエネルギー F を考えるならば、式(11)に $\{C\}\{\dot{\delta}\}$ なる項が加わる。

さて以上の一つの要素における方程式が得られたが構造全体の方程式は各要素の方程式を重ね合わせて結局、式(11)と同型なものを得られる。

4. 数値解析³⁾

(I) 自由振動

式(11)において $\{Q\} = 0$ とおきしかるべき境界条件を与えて得られた計算結果を図-5~7に示す。図-5は図-1のAB部分単純桁の鉛直面内の固有振動モードであり、図-6は水平面内の固有振動モードである。図-7はABC部分連続桁の水平面内の固有振動モードである。境界条件としては、図-3のような支承条件を考慮してそれぞれの沓模型の剛度に応じたバネ定数を桁全体の剛性マトリックスに与えた。鉛直面内の自由振動について固有振動数(CPS)の実験値と計算値を比較すると支点Aが弦方向に可動な場合には実験値 17.6 に対して計算値 19.6、接線方向に可動な場合には実験値

16.8に対して計算値18.7という結果で実験、計算ともに弦方向に可動なときの方が高い振動数である。

表-1はA点が接線方向に可動であるときの構造別にみた固有振動数の計算値である。

	単純桁	単純吊桁	連続桁	連続吊桁
鉛直面内	18.7	27.3	23.9	36.4
水平面内	32.4		46.2	

表-1

水平面内の固有振動数について

A点の支承が接線方向に可動な場合と弦方向に可動な場合を比べてみると、単純桁、連続桁の場合ともに接線方向に可動の場合のときの方が振動数が低い。なお水平面内の自由振動については吊材の影響は考えなかった。数値解析ではAB部分を10個、BC部分を4個の梁要素と考えて計算した。

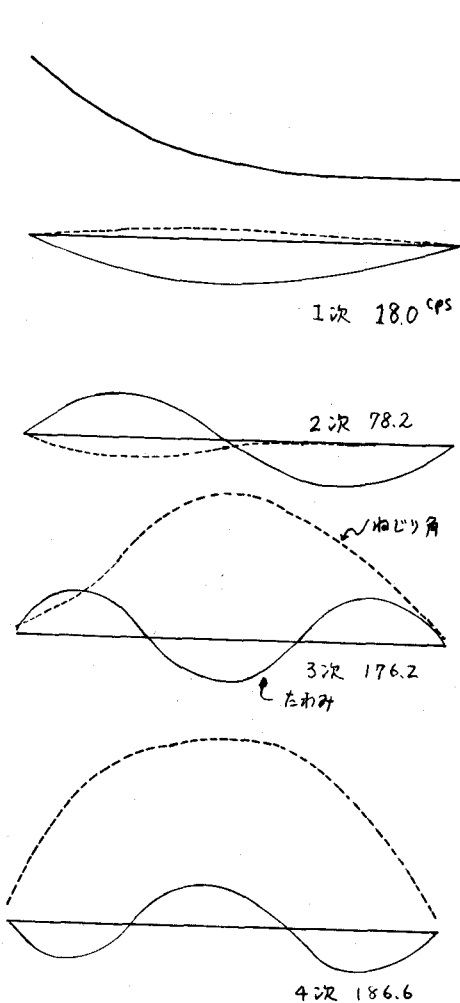


図-5

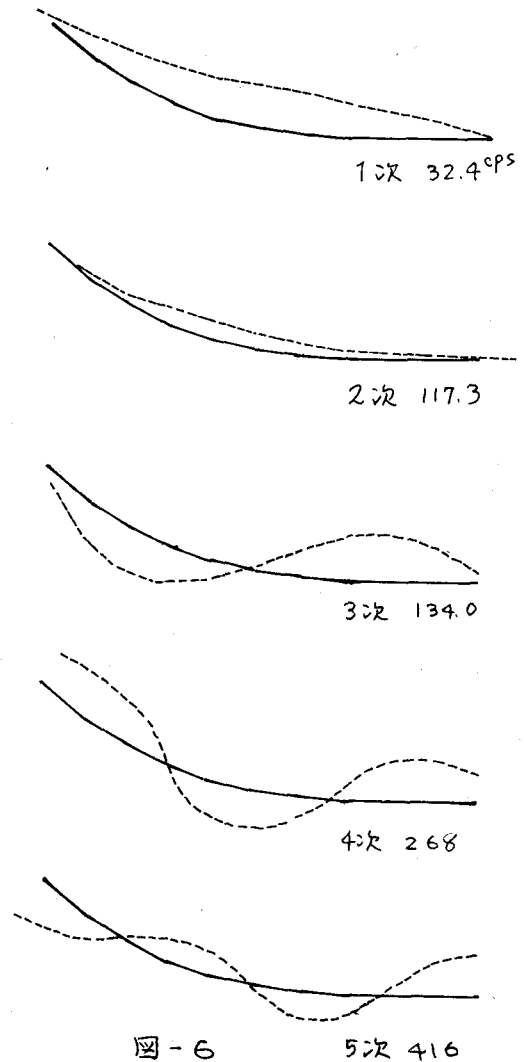


図-6

(四) 定常振動

入力として支点に正弦波状変位を与えた定常振動の沓反力の大きさを求めると図-8のようになる。このときの振動数は20 cpsで構造物の固有振動数より相当低いのでほぼ静的な場合と似た傾向といえる。このような振動数の入力に対しては固有振動数の低い接線方向に可動な沓をもつ構造系の方が大きな反力が生ずることになる。ただし図-8の反力 X_2 でわかるように入力の方角によってはその逆の場合もある。

5 まとめ

以上のように自由振動と定常振動についての計算、実験の結果、沓の可動方向な構造系全体に与える影響はかなり大きいとその度合は単純桁のとき最も大きく連続桁になるとそれは小さくなるといえる。これは支点の数が増せば一つの支点の与える影響は小さくなるということである。沓の反力の大きさについては実験と計算を比べると定量的には合わないが、実験で沓反力を正確に測定するのが非常にむずかしい。その他、箱桁を単に棒

の力学で解いている点や支承が斜角支持となる問題など理論面で上記の計算では不十分な点もあるが全体的にはこのような計算法を実橋に適用して種々の情報を得られると考える。

参考文献

- 1 B.F. DE VUEBEKE "Displacement and equilibrium models in the finite element method" chapter 9 of Stress Analysis
- 2 J.S. ARCHER "Consistent mass matrix for distributed systems" Proc ASCE, 89, p161 (1963)
- 3 PESTEL and LECKIE "Matrix Methods in Elastomechanics"

