Ⅰ－178　質量を考慮した走行荷重による梁の強制振動

九州大学 工学部 正員　山崎徳也
長崎大学 工学部 正員 ○崎山　毅

1．序言　速度を有する荷重が梁の上を走行する際、梁に生ずる過渡的な振動現象を解明し、走行荷重が梁におよぼす衝撃特性を明らかにすることは極めて重要な問題である。そのために、いままで数多くの特色ある研究[(1),(2),(3),(4)]がなされているが、荷重質量が梁の過渡振動さらには衝撃特性といかなる関係を有するかを明らかにした研究は見当らない。著者らは走行荷重によって惹起される梁の強制振動に対する荷重質量の影響をも含めた解法をここに提示し、本法によって、走行速度、荷重質量などの諸要素が梁の過渡強制振動におよぼす影響を明らかにせんとするものである。

2．梁の自由振動　外力が作用し、振動がひき起された場合の梁の動的たわみを、無数に存在する梁の自由振動モードとこれらのモードに対応する何らかの時間函数との積の和の形でとらえるためには、前もって梁の自由振動を解析し、モードおよび固有値を明らかにしておく必要がある。

一様な断面を有する直線梁の鉛直自由振動は周知のとおり次式で表わされる。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \eta^4}+\frac{\rho l^4}{EI}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

ここに

EI：梁の曲げ剛性，ρ：梁の単位長さ当りの質量，l：梁の長さ，$\eta=x/l$，x：梁の軸方向の座標

いま、$y=X_n(\eta)\cdot\sin\omega_n t$，とおいて、これを式(1)に代入すれば、自由振動モード$X_n(\eta)$に関する次式が得られる。

$$\frac{d^4 X_n}{d\eta^4}-\lambda_n^4\cdot X_n=0 \qquad (2)$$

ただし

$$\lambda_n^4=\frac{\rho\omega_n^2 l^4}{EI}\quad,\quad \omega_n：梁の固有角振動数$$

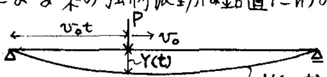
自由振動モード$X_n(\eta)$は与えられた梁の境界条件の下で式(2)を解く事によって得られるが、モードの式中にはなお一個の未定係数が残るために、その絶対値は決定されず、相対的なたわみ形を知り得るのみである。動的応答解析に用いる振動モードは未定係数にいかなる値を採ってもよいが、後の便利のために正規化条件を満足するごとき値をとることとする。正規化モードを$\Phi_n(\eta)$で表わせば

$$\int_0^1\Phi_m(\eta)\cdot\Phi_n(\eta)\,d\eta=\delta_{mn} \quad (3) \qquad \frac{d^4\Phi_n}{d\eta^4}=\lambda_n^4\cdot\Phi_n \quad (4)$$

ただし　δ_{mn}はクロネッカーのデルタである。単純梁に関しては$\Phi_n(\eta)$，λ_nは次式にて与えられる。

$$\Phi_n(\eta)=\sqrt{2}\cdot\sin n\pi\eta \quad,\quad \lambda_n=n\pi \qquad (5)$$

3．走行荷重による強制振動　一定速度v_0で走行する集中荷重Pによる梁の強制振動は鉛直たわみをyとして、次式で表わされる。



$$EI\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+m\cdot\frac{d^2 Y}{dt^2}\cdot\delta(x-v_0 t)=P\cdot\delta(x-v_0 t) \qquad (6)$$

図-1

ここに

$m=P/g$：荷重の質量，$Y(t)$：荷重位置の梁のたわみ，$\delta(x-v_0 t)$：ディラックのデルタ函数

式(6)の左辺の第3項が荷重質量に関する項で、荷重の慣性力を表わす。また時間tは荷重Pが左から右へ向って走行する(図-1参照)ものとして、左支点上に荷重が乗った瞬間より測るものとする。

梁の長さをl、走行荷重が梁を渡るに要する時間をt_0とし，$x=l\cdot\eta$，$t=t_0\cdot\tau$　なる無

次元変数η、τを用いれば式(6)は次のごとく書き換えられる。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \eta^4}+k^2\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}+\mu k^2\frac{d^2 Y}{d\tau^2}\delta(\eta-\tau)=\frac{P\ell^3}{EI}\delta(\eta-\tau) \qquad (7)$$

ただし

$$k=v_0\cdot\sqrt{\frac{\rho\ell^2}{EI}} \quad ,\ \mu=\frac{m}{\rho\ell} \qquad (8)$$

なお無次元変数τは時間を表わすと同時に荷重位置をも表わす。荷重Pの走行による梁の強制振動は式(7)で表わされるが、この時の動的たわみ$y(\eta,\tau)$が自由振動モード$\Phi_n(\eta)$とそれに対応する時間函数との積の和の形で表わされるものとすれば、$y(\eta,\tau)$は次式のごとく書ける。

$$y(\eta,\tau)=\frac{2P\ell^3}{EI}\cdot\sum_n T_n(\tau)\cdot\Phi_n(\eta) \qquad (9)$$

ここで$\Phi_n(\eta)$はn次の自由振動モードであるから、すでに明らかな函数であるとすれば、問題は結局時間函数$T_n(\tau)$を求めることに帰着する。式(9)が微分方程式(7)の解であれば$\Phi_n(\eta)$は梁の境界条件を満足する函数であるから、次式

$$y_n(\eta,\tau)=\frac{2P\ell^3}{EI}\cdot T_n(\tau)\cdot\Phi_n(\eta) \qquad (10)$$

は、式(7)を満足しなければならない。したがって、このとき

$$Y_n(\tau)=y_n(\tau,\tau)=\frac{2P\ell^3}{EI}\cdot T_n(\tau)\cdot\Phi_n(\tau) \qquad (11)$$

であるから、式(10)、(11)を微分方程式(7)に代入して、式(4)の関係を適用すれば、次式を得る。

$$\left(\lambda_n^4\cdot T_n+k^2\frac{d^2T_n}{d\tau^2}\right)\cdot\Phi_n(\eta)+\mu k^2\frac{d^2}{d\tau^2}\left[T_n\cdot\Phi_n(\tau)\right]\delta(\eta-\tau)=\frac{1}{2}\delta(\eta-\tau) \qquad (12)$$

式(12)の両辺に$\Phi_n(\eta)$を掛けて、ηの変域[0, 1]で積分すれば

$$k^2\cdot\left\{\frac{d^2T_n}{d\tau^2}-\mu\cdot\Phi_n(\tau)\cdot\frac{d^2}{d\tau^2}\left[T_n\cdot\Phi_n(\tau)\right]\right\}+\lambda_n^4\cdot T_n=\frac{1}{2}\cdot\Phi_n(\tau) \qquad (13)$$

式(13)は自由振動モード$\Phi_n(\eta)$および固有値λ_nを有する梁の上を、梁の全質量に対する質量比μの荷重が速度kで走行した場合に、式(10)で表わされる動的応答たわみ$y(\eta,\tau)$に含まれる時間函数$T_n(\tau)$を与える方程式である。ここで質量比は同時に走行荷重と梁の重量比とも表わす。

式(13)において$k=0$とおけば $T_n(\tau)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_n(\tau)}{\lambda_n^4}$ となり、この時間函数に対する式(9)はいわゆる梁の静的たわみを与える。また、式(13)において$\mu=0$とおけば

$$k^2\cdot\frac{d^2T_n}{d\tau^2}+\lambda_n^4\cdot T_n=\frac{1}{2}\cdot\Phi_n(\tau) \qquad (14)$$

となり、これより得られる時間函数$T_n(\tau)$を代入した式(9)は、走行荷重の質量を無視したときの梁の動的たわみを与える。単純梁に関しては自由振動モードおよび固有値は式(5)で与えられる。したがって式(5)を式(14)に代入して

$$\frac{d^2T_n}{d\tau^2}+\frac{(n\pi)^4}{k^2}\cdot T_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin n\pi\tau}{k^2} \qquad (15)$$

式(15)は質量を無視した時の単純梁の動的たわみに関係する方程式である。また式(5)を式(13)に代入して

$$\frac{d^2T_n}{d\tau^2}+2\mu\sin n\pi\tau\cdot\frac{d^2}{d\tau^2}\left(T_n\cdot\sin n\pi\tau\right)+\frac{(n\pi)^4}{k^2}\cdot T_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin n\pi\tau}{k^2} \qquad (16)$$

ここに

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(T_n\cdot\sin n\pi\tau\right)=-(n\pi)^2\cdot T_n\cdot\sin n\pi\tau+2(n\pi)T_n'\cos n\pi\tau+T_n''\sin n\pi\tau \qquad (17)$$

式(16)および(17)より単純梁の時間函数$T_n(\tau)$に関する次式を得る。

$$(1+2\mu\sin^2 n\pi\tau)\frac{d^2T_n}{d\tau^2}+2\mu(n\pi)\sin 2n\pi\tau\,\frac{dT_n}{d\tau}+\left[\frac{(n\pi)^4}{k^2}-2\mu(n\pi)^2\sin^2 n\pi\tau\right]T_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sin n\pi\tau}{k^2} \qquad (18)$$

微分方程式(18)は単純梁の時間函数$T_n(\tau)$に関する厳密な微分方程式であるが、この解を解析的に求めることは困難である。そこで式(17)において左辺の第2、第3項を第1項に比して微小であると仮定[4]して無視すれば式(19)を得る。

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(T_n\cdot\sin n\pi\tau\right)\fallingdotseq-(n\pi)^2\cdot T_n\cdot\sin n\pi\tau \qquad (19)$$

式(19)を式(16)に代入すれば、時間函数$T_n(\tau)$の近似解を与える微分方程式(20)が求まる。

$$\frac{d^2T_n}{d\tau^2}+\left[\left(\frac{(n\pi)^4}{k^2}-\mu(n\pi)^2\right)+\mu(n\pi)^2\cos 2n\pi\tau\right]\cdot T_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sin n\pi\tau}{k^2} \qquad (20)$$

式(20)はいわゆるMathieuの微分方程式である。ここで　$n\pi\tau=z$　とおき、式(20)を変数変換すれば

$$\frac{d^2T_n}{dz^2}+\left\{\left[\left(\frac{n\pi}{k}\right)^2-\mu\right]+\mu\cdot\cos 2z\right\}\cdot T_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin z}{k^2} \qquad (21)$$

方程式(21)の解は次式で表わされる。式中A，Bは初期条件により決定される定数である。

$$T_n(\tau)=A\cdot ce_\nu(z,q)+B\cdot se_\nu(z,q)-C_0 \qquad (22)$$

ただし　$ce_\nu(z,q)$ および $se_\nu(z,q)$ はMathieu函数[5]である。

ここで

$$ce_\nu(z,q)\fallingdotseq\cos\nu z-\frac{q}{4}\left[\frac{\cos(\nu+2)z}{\nu+1}-\frac{\cos(\nu-2)z}{\nu-1}\right]$$

$$se_\nu(z,q)\fallingdotseq\sin\nu z-\frac{q}{4}\left[\frac{\sin(\nu+2)z}{\nu+1}-\frac{\sin(\nu-2)z}{\nu-1}\right]$$

$$\left(\frac{n\pi}{k}\right)^2-\mu\fallingdotseq\nu^2+\frac{q^2}{2(\nu^2-1)}\ ,\quad q=-\frac{\mu}{2}$$

$$C_0=\frac{1}{C^2}\left[ce_\nu(z,q)\int^z se_\nu(u,q)\cdot f(u)\,du-se_\nu(z,q)\int^z ce_\nu(u,q)\cdot f(u)\,du\right]$$

$$f(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin z}{k^2(n\pi)^2}\ ,\quad C^2=ce_\nu(0)\cdot se_\nu'(0)-se_\nu(0)\cdot ce_\nu'(0)$$

4．数値計算および考察　三種の方程式(14)、(18)、(20)を用いて、梁の過渡振動時における中央点の運動を図-2・a, bに示す。これより、式(19)のごとき仮定を用いた場合、得られる結果は厳密式(18)の結果よりもむしろ質量無視の式(14)の結果に近いことがわかる。図-3・a, bは動的たわみ影響線と静的たわみ影響線との差をプロットしたもので、中央点の運動は静的平衡位置を基準とする擬正弦振動であることがわかる。図の波数をfとすれば擬正弦振動の振動数はf/t_0であるから、角速度をωとすれば

$$\frac{f}{t_0}=\frac{\omega}{2\pi}\qquad\therefore\ \omega^2=4\pi^2\cdot\frac{f^2}{t_0^2}$$

また式(8)より $\rho l^2/EI=k^2\cdot t_0^2$ であるから結局　$\sqrt{\frac{\rho\omega^2 l^4}{EI}}=2\pi k f$

図-3・a, bより波数fを読んで、上式の$2\pi kf$の値を算定すれば　$2\pi kf\fallingdotseq\pi^2$

この値は単純梁の最低次の固有値 $(\rho\omega^2 l^4/EI)^{\frac{1}{2}}=\pi^2$ と一致する。すなわち中央点の擬正弦振動に関しては、振幅は速度kにより異なるが、振動数は速度に無関係で、固有値に極めて近い値をとる運動であるといえる。図-4は動的たわみ影響線の最大値とそれに対応する静的たわみとの差を静的たわみで除した、いわゆる衝撃率と荷重質量比との関係を示す。同様に図-5は無次元速度kと衝撃率との関係を示すものであるが$k=0.6$附近に特異な点が存在する。

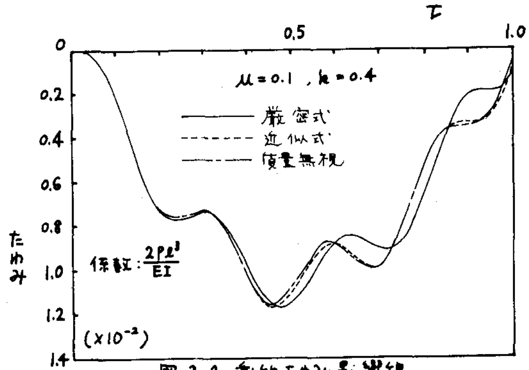


図-2・a 動的たわみ影響線

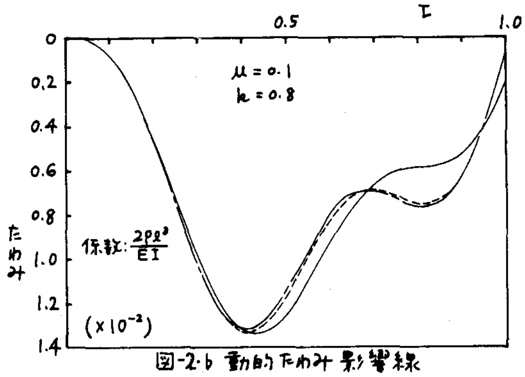


図-2・b 動的たわみ影響線

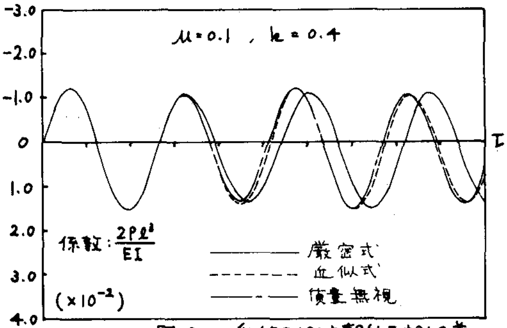


図-3・a 動的たわみと静的たわみの差

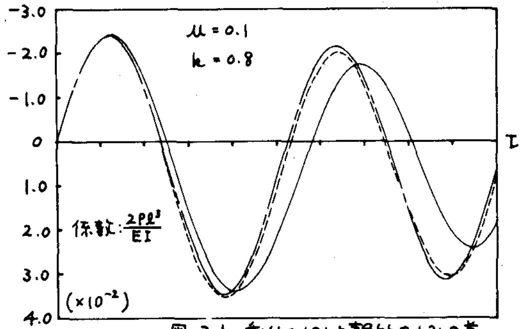


図-3・b 動的たわみと静的たわみの差

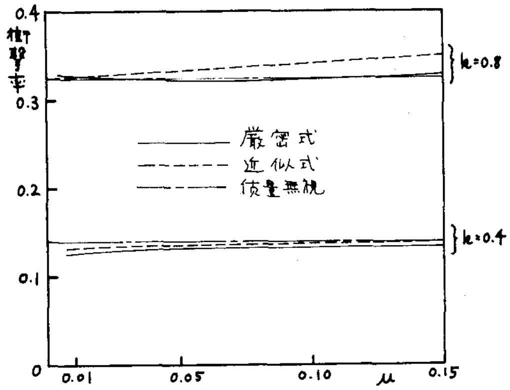


図-4 衝撃率と質量比の関係

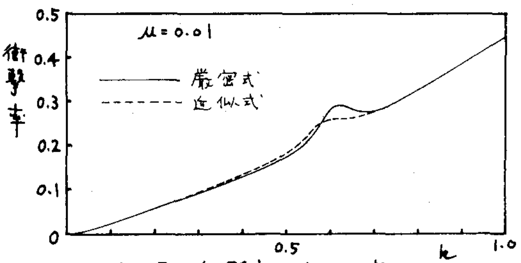


図-5 衝撃率とkとの関係

5、あとがき　本研究により走行荷重の質量が梁の過渡振動さらには衝撃率におよぼす影響を明確にすることができた。計算例としては単純梁のみを取り上げたが、自由振動モードおよび固有値さえ知ることができれば、その他の構造を有する梁や板構造に関しても本法を適用して、過渡現象を解析し得ることはいうまでもなく、多方面への応用展開を計画中である。

(1) 三瀬・園井「走行荷重による橋桁の強制振動」九大弾性工学研究所報告 1-1　1943
(2) 平井一男「種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用」土木学会論文集 No.90 昭38.2
(3) 山田・小堀「活荷重に対する道路橋の応答－衝撃係数－に関する考察」土木学会論文集 No.148 昭42.12
(4) 平井・伊藤「長径間鉄道吊橋の活荷重による変形と衝撃」鉄道吊橋の実用性に関する基礎研究の報告 昭41
(5) N. W. McLACHLAN「Theory and Application of Mathieu Functions」Oxford 1947