

山梨大学工学部 正員 深沢泰晴

清水建設株式会社 正員 〇秋山昇

1. はじめに

鉄道車両などのような走行荷重によってアーチ橋に生ずる振動について、その特性を調べ、アーチ橋の設計に関する基礎的な資料を得ることがこの研究の目的である。アーチ系橋梁には、単純桁系の橋梁とは違って、逆対称一次の固有モードが卓越するという特徴（吊橋と似ている）がある。したがって設計に用いるべき衝撃係数としても独自のものが考えられなければならないはずであるが、現行の設計法ではこの特性が考慮されておらず、そのため危険側の設計となっているおそれもある。

アーチの自由振動の特性については、F. W. Walthering¹⁾ もはじめ多くの研究者によって検討されてきたが、その強制振動特に走行荷重に対する応答のような過渡的振動現象に関する研究は少ない。ここでは図-1に示すような円弧アーチで通常の放物線アーチ橋を近似し、荷重は円弧の弦に沿って走行するものとして、その動的挙動を理論的に解析するとともに、模型実験による検討もあわせて行った。本文ではこれらのごく概略を中略報告する。

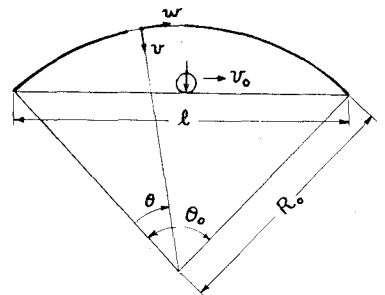


図-1 円弧アーチ

2. 振動方程式と固有振動の解

円弧アーチの振動方程式は作用軸圧縮力も N とし、図-1の記号を用いると次のように書ける

$$\left. \begin{aligned} EJ_x \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + NR_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + EFR_0^2 v + m_0 R_0^4 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EJ_x \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - (EFR_0^2 - NR_0^2) \frac{\partial w}{\partial \theta} &= R_0^4 g_y(\theta, t) \\ EJ_x \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - (EFR_0^2 - NR_0^2) \frac{\partial w}{\partial \theta} + (EJ_x + EFR_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + NR_0^2 w - m_0 R_0^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -R_0^4 g_z(\theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $g_y(\theta, t)$ 及び $g_z(\theta, t)$ は各々曲率中心方向及び接線方向に作用する単位質量力（単位長さ当りの質量）を意味し、 F 及び J_x は各々アーチリブの断面二次モーメントを表わし、 m_0 は単位長さ当りの質量である。

式(1)において、 $N = \text{const.}$ （軸力の影響は特別の場合を除いて小さい）とし、二ヒンジアーチ及び固定アーチについて振動数方程式と固有関数を求めると表-1のようになる。

同表において、 λ_i ($i=1, 2, 3$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$) は

$$\lambda^6 - (2 + \kappa + \kappa_R) \lambda^4 + (1 - \kappa_R + 2\kappa - \kappa_R \kappa_R + \kappa_R \kappa_R) \lambda^2 - (\kappa_R + \kappa)(1 - \kappa_R \kappa_R) = 0$$

の根である。ここに、

$$\kappa = \frac{NR_0^2}{EJ_x}, \quad \kappa_R = \frac{J_R}{FR_0^2}, \quad \kappa_R = p^2 \frac{m_0 R_0^4}{EJ_x}$$

(p : 固有円振動数)

$$\text{更に、} \Psi_i = \frac{(1 + \kappa_R) \lambda_i^2 - \kappa_R (\kappa + \kappa_R)}{\lambda_i^2 (\kappa \lambda_i^2 + 1 - \kappa_R \kappa)}$$

	振動数方程式	固有関数	
		$\bar{v}(\theta)$	$\bar{w}(\theta)$
二ヒンジアーチ 対称振動	$\sum_{i=1}^3 e_i \tan \lambda_i \frac{\theta_0}{2} = 0$	$C \sum_{i=1}^3 \Psi_i e_i \frac{\cos \lambda_i (\frac{\theta_0}{2} - \theta)}{\cos \lambda_i \frac{\theta_0}{2}}$	$-C \sum_{i=1}^3 e_i \frac{\sin \lambda_i (\frac{\theta_0}{2} - \theta)}{\cos \lambda_i \frac{\theta_0}{2}}$
二ヒンジアーチ 逆対称振動	$\sum_{i=1}^3 e_i \cot \lambda_i \frac{\theta_0}{2} = 0$	$C \sum_{i=1}^3 \Psi_i e_i \frac{\sin \lambda_i (\frac{\theta_0}{2} - \theta)}{\sin \lambda_i \frac{\theta_0}{2}}$	$C \sum_{i=1}^3 e_i \frac{\cos \lambda_i (\frac{\theta_0}{2} - \theta)}{\sin \lambda_i \frac{\theta_0}{2}}$
固定アーチ 対称振動	$\sum_{i=1}^3 f_i \tan \lambda_i \frac{\theta_0}{2} = 0$	$C \sum_{i=1}^3 \Psi_i f_i \frac{\cos \lambda_i (\frac{\theta_0}{2} - \theta)}{\cos \lambda_i \frac{\theta_0}{2}}$	$-C \sum_{i=1}^3 f_i \frac{\sin \lambda_i (\frac{\theta_0}{2} - \theta)}{\cos \lambda_i \frac{\theta_0}{2}}$
固定アーチ 逆対称振動	$\sum_{i=1}^3 g_i \cot \lambda_i \frac{\theta_0}{2} = 0$	$C \sum_{i=1}^3 \Psi_i g_i \frac{\sin \lambda_i (\frac{\theta_0}{2} - \theta)}{\sin \lambda_i \frac{\theta_0}{2}}$	$C \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\cos \lambda_i (\frac{\theta_0}{2} - \theta)}{\sin \lambda_i \frac{\theta_0}{2}}$

表-1 アーチの振動数方程式と固有関数

$$e_1 = \psi_2 \lambda_2 (1 - \psi_3 \lambda_3) - \psi_3 \lambda_2 (1 - \psi_2 \lambda_2), \quad e_2 = \psi_3 \lambda_1 (1 - \psi_1 \lambda_1) - \psi_1 \lambda_3 (1 - \psi_3 \lambda_3), \quad e_3 = \psi_1 \lambda_2 (1 - \psi_2 \lambda_2) - \psi_2 \lambda_1 (1 - \psi_1 \lambda_1)$$

$$f_1 = \psi_2 \psi_3 (\lambda_3 \tan \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} - \lambda_2 \tan \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}), \quad f_2 = \psi_3 \psi_1 (\lambda_1 \tan \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} - \lambda_3 \tan \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}), \quad f_3 = \psi_1 \psi_2 (\lambda_2 \tan \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} - \lambda_1 \tan \lambda_2 \frac{\theta_0}{2})$$

$$g_1 = \psi_2 \psi_3 (\lambda_3 \cot \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} - \lambda_2 \cot \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}), \quad g_2 = \psi_3 \psi_1 (\lambda_1 \cot \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} - \lambda_3 \cot \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}), \quad g_3 = \psi_1 \psi_2 (\lambda_2 \cot \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} - \lambda_1 \cot \lambda_2 \frac{\theta_0}{2})$$

3. 強制振動の一般解

表-1 に示した固有関数 $\bar{V}_n(\theta)$, $\bar{W}_n(\theta)$ をま
ず次式によって正規化する

$$V_n = \frac{\bar{V}_n}{\sqrt{\int_0^{\theta_0} (\bar{V}_n^2 + \bar{W}_n^2) R_0 d\theta}}, \quad W_n = \frac{\bar{W}_n}{\sqrt{\int_0^{\theta_0} (\bar{V}_n^2 + \bar{W}_n^2) R_0 d\theta}}$$

次に式(1)を解くために、次のような固有関
数を核とする積分変換を考える

$$D_n(t) = \int_0^{\theta_0} (V_n \cdot v + W_n \cdot w) R_0 d\theta \quad \dots \dots (2)$$

このとき、逆変換は次式で与えられる

$$\left. \begin{aligned} v(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\theta) \cdot D_n(t) \\ w(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\theta) \cdot D_n(t) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (3)$$

さて、式(1)のオ1式に V_n , オ2式に $-W_n$ を
乗じ、 θ について区間 $(0, \theta_0)$ の定積分を
施し、両2式を加え合せ、更に固有関数に因

する微分方程式も考慮すると、結局積分変換 $D_n(t)$ に関する次の微分方程式を得る

$$\frac{d^2}{dt^2} D_n(t) + p_n^2 D_n(t) = Q_n(t), \quad \text{ここに} \quad Q_n(t) = \frac{1}{m_0} \int_0^{\theta_0} (V_n q_y + W_n q_z) R_0 d\theta \quad \dots \dots (4)$$

$$\text{したがって,} \quad D_n(t) = A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t + \frac{1}{p_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin p_n(t-\tau) d\tau \quad \dots \dots (5)$$

4. 走行集中荷重に対する解

円弧の弦に垂直な集中力 $P(t)$ が弦に沿って一定速度 v_0 で移動する場合(図-1 参照)には

$$P_y(t) = P(t) \sqrt{1 - (\sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{v_0}{R_0} t)^2}, \quad P_z(t) = -P(t) (\sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{v_0}{R_0} t), \quad \theta(t) = \frac{\theta_0}{2} - \sin^{-1} (\sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{v_0}{R_0} t)$$

$$\left. \begin{aligned} q_y(\theta, t) &= \frac{P(t)}{R_0} \sqrt{1 - (\sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{v_0}{R_0} t)^2} \delta \left[\theta - \left\{ \frac{\theta_0}{2} - \sin^{-1} (\sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{v_0}{R_0} t) \right\} \right] \\ q_z(\theta, t) &= -\frac{P(t)}{R_0} (\sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{v_0}{R_0} t) \delta \left[\theta - \left\{ \frac{\theta_0}{2} - \sin^{-1} (\sin \frac{\theta_0}{2} - \frac{v_0}{R_0} t) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (6)$$

$\delta(\theta)$ は Dirac の衝撃関数。式(4), (6)より $Q_n(t)$ を計算し、更に式(5)の積分を行なえば $D_n(t)$ が得
られる。 $D_n(t)$ を知れば、逆変換の式(3)によりこの場合の動的応答が求まる。

5. 数値的並びに実験的検討

真鍮製 2 ヒンゲアーチの模型(ス
パン $l = 25.0 \text{ cm}$, 中心角 $\theta_0 = 1.166$)
について、 V_n , W_n を計算した結果が
図-2 に示される。図-3 は 1805
g の鋼球を一定速度(通過時間 $T_0 =$
1.0 sec) で通過させたときの $\frac{1}{4}$ 点
の $v(\theta, t)$ を実測値との比較におい

て示した。注1) F.W. Walthering; Ingenieur Archiv, 1934

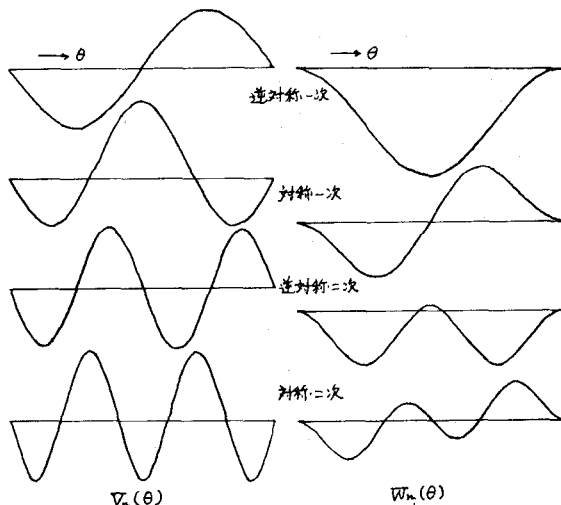


図-2 模型A-4の固有モード

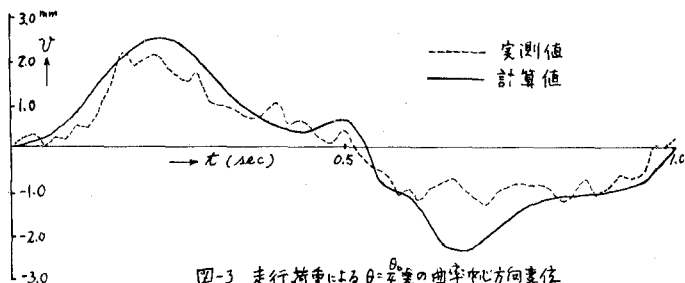


図-3 走行荷重による $\theta = \frac{\theta_0}{4}$ 点の曲率中心方向変位