

九州大学工学部 正員 山崎 徳也

長崎大学工学部 崎 山 毅

九州大学工学部 学生員 〇千々岩 敏弼

1. 序言 先に著者は曲線桁の中でもっとも一般的な円形曲り梁の走行荷重に対する動的応答性状に関する報告⁽¹⁾を行なったが、この解式中においては走行荷重の質量を無視したために、得られた結果は曲げ剛性の大きな梁上を比較軽い荷重が走行する場合にのみ適合するといえ、したがって曲げ剛性の小さな梁上をかなり重い荷重が走行する場合のように荷重の質量を無視できない状態に対しては、当然この荷重質量の影響をも考慮した梁の動的応答解析が必要となる。このような見地より本論文は走行荷重の質量をも考慮した解析を行ない、荷重質量が梁の動的応答に及ぼす影響を検討し、更に荷重の速度、円形曲り梁の中心角および梁の断面剛性等の諸要素が円形曲り梁の動的応答に及ぼす影響を及ぼす種々の検討を試み、走行荷重に対する円形曲り梁の動的応答性状を明らかにしたものである。

2. 円形曲り梁の基本式 円形曲り梁の受ける外力、すなわち鉛直荷重強度およびねじれモーメント荷重強度をそれぞれ q, m で表わし、これら外力によって生ずる円形曲り梁の変形量、すなわち鉛直たわみ、たわみ角およびねじれ角をそれぞれ w, φ, ψ とすれば、これら変形量 w, φ, ψ と荷重強度 q, m との間には次の連立微分方程式が成立する。⁽²⁾

$$\frac{d^4 w}{d\theta^4} - \mu \frac{d^2 w}{d\theta^2} + (1+\mu) \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\theta^2} - \frac{R^4}{EI} q = 0 \quad (1) \quad (1+\mu) \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \mu \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\theta^2} + \bar{\psi} - \frac{R^3}{EI} m = 0 \quad (2)$$

ただし R : 円形曲り梁の曲率半径, $\bar{\psi} = R\psi$, $\mu = GJ/EI$

EI GJ : 円形曲り梁の曲げ剛性およびねじれ剛性

式(1),(2)より $\bar{\psi}$ を消去すれば鉛直変位 w に関する次式を得る。

$$\frac{d^6 w}{d\theta^6} + 2 \frac{d^4 w}{d\theta^4} + \frac{d^2 w}{d\theta^2} = \frac{R^4}{EI} \left(\frac{d^2 q}{d\theta^2} - \frac{q}{\mu} \right) + \frac{1+\mu}{\mu} \frac{R^3}{EI} \frac{d^2 m}{d\theta^2} \quad (3)$$

式(3)より鉛直たわみ w が求まれば、次の諸式よりその他の変形量 $\bar{\psi} = R\psi$, $\bar{\psi}$ および応力量すなわち曲げモーメント M , ねじれモーメント T およびせん断力 Q が求められる。⁽²⁾

$$\varphi = w' \quad (4) \quad \bar{\psi} = -\frac{\mu}{1+\mu} w'' - \frac{1+2\mu}{1+\mu} w'' + \frac{\mu}{1+\mu} \frac{R^4}{EI} q + \frac{R^3}{EI} m \quad (5)$$

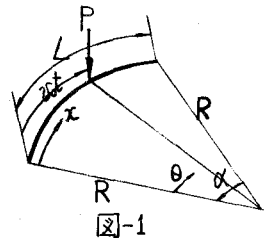
$$M = -\frac{EI}{R^2} (w'' + \bar{\psi}) \quad (6) \quad T = \frac{GJ}{R^2} (\bar{\psi}' - w') \quad (7) \quad Q = -\frac{EI}{R^2} [w''' - \mu w' + (1+\mu) \bar{\psi}'] \quad (8)$$

3. 円形曲り梁の一定速度 u を有する走行荷重による強制振動

図-1に示すように $x=ut$ 点に移動集中荷重 P が作用し、梁に強制振動が生じた場合の荷重強度 q は、梁の質量による慣性力、走行荷重 P による荷重強度および走行荷重 P が有する質量による慣性力から成り、次のごとく表わされる。

$$q = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P \delta(x-ut) - \frac{P}{g} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \delta(x-ut) \quad (9)$$

ただし u : 走行荷重の速度, $y(t)$: 荷重作用点の鉛直たわみ, $\delta(x-ut)$: Dirac函数
 ρ : 梁の単位長さ当りの質量,



$$\text{ここで } y(x) = w(xt, t), \text{ ゆえに } \frac{d^2 y(x)}{dt^2} = v_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$\text{本論文では式(10)を次のごとく近似することとする。} \quad \frac{d^2 y(x)}{dt^2} = v_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (11)$$

図-1より $x=R\theta$ であるゆえ、式(9)および式(11)を用いることにより荷重強度 q は次式のごとく無次元化して表わされる。

$$q = -P \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{P}{R\alpha} \delta(\eta - \tau) - \frac{m \cdot \omega_0^2}{\alpha^2 R \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \delta(\eta - \tau) \quad (12)$$

$$\text{ただし } m = P/g, \quad t = t_0 \tau, \quad t_0 = L/v_0, \quad v_0 = R\theta/t, \quad \theta = \alpha \eta, \quad \omega_0 = v_0/R$$

L : 円形曲り梁の部材長, α : 円形曲り梁の中心角

したがって式(1)および式(2)を無次元化し、式(12)を代入すれば次のごとく荷重の質量を考慮した円形曲り梁の走行荷重に対する強制振動の基本式が求められる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - \alpha^2 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \alpha^2 (1+\mu) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} + k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + s k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \delta(\eta - \tau) = \frac{PL}{EI} \delta(\eta - \tau) \quad (13)$$

$$(1+\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \mu \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2} + \alpha^2 \bar{\varphi} = 0 \quad (14)$$

$$\text{ただし } k = \left(\frac{g^4}{EI^2 t_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g^4}{EI^2} \right)^{\frac{1}{2}} v_0 = (\text{無次元速度}), \quad s = \frac{m}{\Sigma L} = (\text{荷重の質量})/(\text{梁の全質量}), \quad s k^2 = -\frac{\pi L v_0^2}{EI}$$

以下、両端部が単純支持された円形曲り梁について考察を進める。

鉛直たわみ w およびねじれ角 $\bar{\varphi}$ は両端単純支持円形曲り梁の自由振動モードが $C \cdot \sin n\pi\eta$ (C は任意定数) であるゆえ、⁽¹⁾ それぞれの時間函数を $T_n(\tau)$ および $\bar{\psi}_n(\tau)$ とすれば次式のごとく表わされる。

$$w(\eta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\tau) \sin n\pi\eta, \quad \bar{\varphi}(\eta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_n(\tau) \sin n\pi\eta \quad (15)$$

式(15)で与えられる $w, \bar{\varphi}$ が連立微分方程式(13), (14)の解ならば、 $w(\eta, \tau) = T_n(\tau) \sin n\pi\eta$ および $\bar{\varphi}(\eta, \tau) = \bar{\psi}_n(\tau) \sin n\pi\eta$ は当然、式(13), (14)を満足しなければならない。したがってこれらを式(13), (14)に代入すれば

$$(\pi n)^4 T_n(\tau) \sin n\pi\eta + \alpha^2 \mu (\pi n)^2 T_n(\tau) \sin n\pi\eta - \alpha^2 (1+\mu) (\pi n)^2 \bar{\psi}_n(\tau) \sin n\pi\eta + k^2 T_n''(\tau) \sin n\pi\eta - s k^2 (\pi n)^2 T_n(\tau) \sin n\pi\eta \delta(\eta - \tau) = \frac{PL}{EI} \delta(\eta - \tau) \quad (16)$$

$$-(1+\mu) (\pi n)^2 T_n(\tau) \sin n\pi\eta + \mu (\pi n)^2 \bar{\psi}_n(\tau) \sin n\pi\eta + \alpha^2 \bar{\psi}_n''(\tau) \sin n\pi\eta = 0 \quad (17)$$

更に、式(16)および式(17)の両辺に $\sin n\pi\eta$ を掛けて η の変域 $[0, 1]$ で積分すれば次式を得る。

$$\frac{1}{2} (\pi n)^4 T_n(\tau) + \frac{1}{2} \alpha^2 \mu (\pi n)^2 T_n(\tau) - \frac{1}{2} \alpha^2 (1+\mu) (\pi n)^2 \bar{\psi}_n(\tau) + \frac{1}{2} k^2 T_n''(\tau) - s k^2 (\pi n)^2 \sin^2 n\pi \cdot T_n(\tau) = \frac{PL^3}{EI} \sin n\pi \quad (18)$$

$$-\frac{1}{2} (1+\mu) (\pi n)^2 T_n(\tau) + \frac{1}{2} \mu (\pi n)^2 \bar{\psi}_n(\tau) + \frac{1}{2} \alpha^2 \bar{\psi}_n''(\tau) = 0 \quad (19)$$

ここで、式(18)および式(19)から $\bar{\psi}_n(\tau)$ を消去して整理すると次式を得る。

$$\frac{1}{2} k^2 T_n''(\tau) + \left[\frac{1}{2} (\pi n)^4 + \frac{1}{2} \mu \alpha^2 (\pi n)^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 (1+\mu) (\pi n)^2 \frac{(1+\mu) (\pi n)^2}{\alpha^2 + \mu (\pi n)^2} - s k^2 (\pi n)^2 \sin n\pi \right] T_n(\tau) = \frac{2PL^3}{EI} \sin n\pi \quad (20)$$

i) $k=0$ の場合: 式(20)に $k=0$ を代入し、 $T_n(\tau)$ を求め、 $T_n(\tau)$ を式(15)に代入することより速度0に対する任意点の鉛直たわみ、即ち任意点のたわみ影響線を表わす式(21)が求まる。

$$w_2(\eta, \tau) = \frac{2PL^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^2} \frac{1}{A_n^2} \cdot \sin n\pi\eta \cdot \sin n\pi\tau \quad (21)$$

$$\text{ただし } A_n^2 = \{ (\pi n)^2 - \alpha^2 \} / \{ (\pi n)^2 + \alpha^2 \mu \}$$

ii) $k \neq 0$ の場合: 式(20)の両辺を $k^2/2$ で割り、更に $n\pi\tau = z$ とおけば次式を得る。

$$T_n''(\tau) + [a - 2g \cos 2z] \cdot T_n(\tau) = -\frac{2PL^3}{EI k^2 (\pi n)^2} \sin z \quad (22)$$

$$\text{ただし } a = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 - 5 + \alpha^2 \left\{ \frac{\mu}{k^2} - \left(\frac{\pi\pi}{k}\right)^2 \frac{(1+\mu)^2}{\alpha^2 + \mu(\pi\pi)^2} \right\} \quad \bar{g} = -\frac{5}{2}$$

式(15)における時間函数 $T_n(t)$ の微分方程式である式(22)はいわゆる Mathieu の微分方程式であり、その一般解は次式で与えられる。

$$T_n(t) = A y_1(z) + B y_2(z) - \frac{1}{c^2} \left[y_1(z) \int y_2(u) f(u) du - y_2(z) \int y_1(u) f(u) du \right] \quad (23)$$

$$\text{ただし } y_1(z) = ce_\nu(z, \bar{g}), \quad y_2(z) = se_\nu(z, \bar{g}), \quad \nu = a^{\frac{1}{2}}, \quad c^2 = y_1'(0) \cdot y_2'(0) - y_2(0) \cdot y_1'(0), \quad A, B: \text{積分定数}$$

$$ce_\nu(z, \bar{g}) = \cos \nu z - \frac{\bar{g}}{4} \left[\frac{\cos(\nu+2)z}{\nu+1} - \frac{\cos(\nu-2)z}{\nu-1} \right], \quad se_\nu(z, \bar{g}) = \sin \nu z - \frac{\bar{g}}{4} \left[\frac{\sin(\nu+2)z}{\nu+1} - \frac{\sin(\nu-2)z}{\nu-1} \right]$$

$$f(u) = \frac{2Pl^3}{EI} \frac{\sin \pi z}{k^2(\pi x)^2}$$

式(23)において積分演算を行なえば式(24)が得られ、更に式(24)を z で微分すれば式(25)を得る。

$$T_n(z) = A y_1(z) + B y_2(z) - \frac{Pl^3}{EI} (y_1(z) Y_2 + y_2(z) Y_1) \quad (24)$$

$$T_n'(z) = A y_1'(z) + B y_2'(z) - \frac{Pl^3}{EI} (y_1'(z) Y_2 + y_2'(z) Y_1 - y_1(z) Y_1') \quad (25)$$

$$\text{ただし } Y_1 = \frac{1}{c^2} \int y_1(u) f(u) du = \frac{1}{c^2 k^2 (\pi x)^2} \left\{ -\frac{\cos(\nu+1)z}{1+\nu} + \frac{\cos(\nu-1)z}{1-\nu} \right\} + X \left\{ \frac{\cos(\nu+1)z}{1+\alpha} + \frac{\cos(\nu-1)z}{1-\alpha} \right\} - Y \left\{ \frac{\cos(\nu+1)z}{1+\beta} + \frac{\cos(\nu-1)z}{1-\beta} \right\}$$

$$Y_2 = \frac{1}{c^2} \int y_2(u) f(u) du = \frac{1}{c^2 k^2 (\pi x)^2} \left\{ \frac{\sin(\nu+1)z}{1-\nu} - \frac{\sin(\nu-1)z}{1+\nu} \right\} - X \left\{ \frac{\sin(\nu+1)z}{1-\alpha} - \frac{\sin(\nu-1)z}{1+\alpha} \right\} + Y \left\{ \frac{\sin(\nu+1)z}{1-\beta} - \frac{\sin(\nu-1)z}{1+\beta} \right\}$$

$$X = a \cdot \bar{g}, \quad Y = b \cdot \bar{g}, \quad a = \frac{1}{4(\nu+1)}, \quad b = \frac{1}{4(\nu-1)},$$

$$\alpha = \nu+2, \quad \beta = \nu-2, \quad c^2 = (1-X+Y)(\nu-\alpha X+\beta Y)$$

ここで、積分定数 A, B は初期条件、即ち $z=0$ のとき $T_n(0) = T_n'(0) = 0$ より次のごとく求まる。

$$A = 0, \quad B = \frac{Pl^3}{EI} \left[\frac{y_1(0) \cdot y_2'(0)}{y_2'(0)} - y_1'(0) \right]$$

ゆえに、式(24)は次式のごとく表わされる。

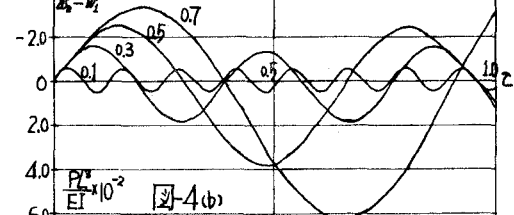
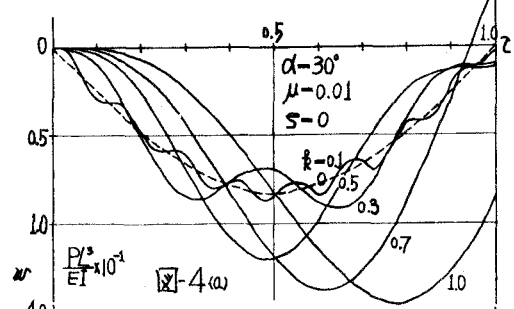
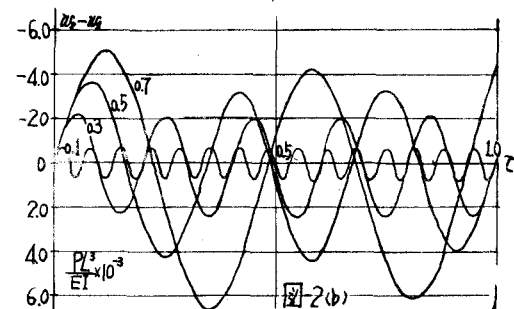
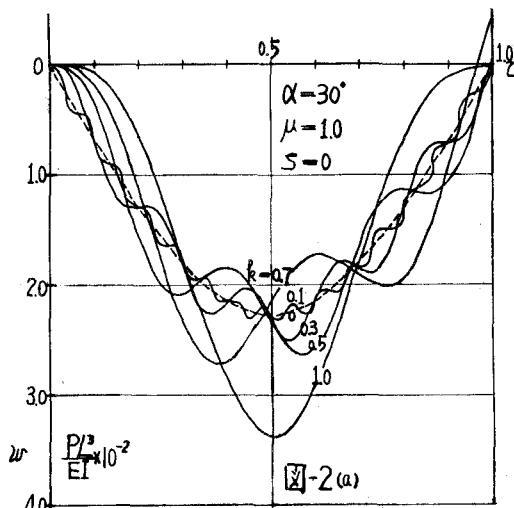
$$T_n(z) = \frac{Pl^3}{EI} \left[\left\{ \frac{y_1(0) \cdot y_2'(0)}{y_2'(0)} - y_1'(0) \right\} y_2 - y_1(z) Y_2 + y_2(z) Y_1 \right] \quad (26)$$

したがって求める動的たわみ w_2 は式(26)を式(15)に代入することより次式で算出されることとなる。

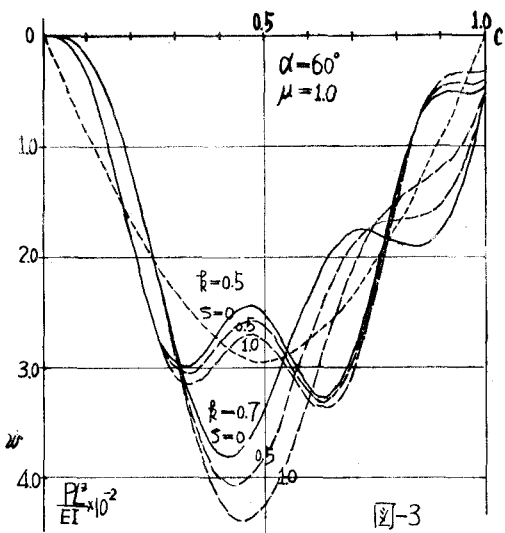
$$w_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx \quad (27)$$

4 数値計算および考察

導いた式(26)および式(27)を用いて、両端部が単純支持された円形曲り梁の動的応答を算定し、図2~4を得た。図-2(a)は中心角 $\alpha = 30^\circ$, $\mu = GJ/EI = 1.0$ の円形曲り梁上を集中荷重 P が定速で走行する場合の梁の中央点の鉛直たわみ w_2 を示し、図中点線は梁の中央点の鉛直たわみ影響線を表わすものである。図-2(a)から荷重の走行速度が増すと中央点の最大たわみも増加することがわかり、梁の中央点の動的応答の状態は図-2(b)に示すごとく、点線で描いたいわゆる静的たわみ影響線を基準にして、中央点のたわみをプロットすることより更に明確になる。即ち梁の中央点は静的な平衡状態を基準にして、擬正弦振動を行っており、一定中心角 α のもとでの単位時間当りの強制振動数は、走行速度に無関係にほぼ一定で、梁の自由振動の第1次振動数に極めて近い値をとるが、振幅は速度が増すと大きくなることかわかる。図-3は中心角 $\alpha = 60^\circ$, $\mu = GJ/EI = 1.0$ の円形曲り梁上を集中荷重 P が定速走行する場合の走行荷重の質量と梁の全質量との比の影響を示したもので



あり、走行速度が増すと質量比の影響が顕著に現れてき、走行荷重が梁上 0.25L を通過するところから梁の中央点の鉛直たわみに質量比の影響が生じてくるといえる。また図-2(a),(b) は中心角 $\alpha=30^\circ$ の円形曲り梁上を集中荷重 P が定速走行する場合の梁の中央点の鉛直たわみに $\mu=GJ/EI$ が及ぼす影響を示したもので、図-2(a),(b) と比較することより曲げ剛性に対するねじれ剛性の比 μ が小さくなると梁の中央点の鉛直たわみが増加し、また静的な平衡状態を基準にした場合の振動数は減少する傾向を示すことがわかる。



5. 結語 本論においては両端単純支持の円形曲り梁を対象に解析を行なったが、全く同様の手法をその他の構造形式を有する円形曲り梁にも適用できる。梁が他の境界条件を有する場合、また式(11)の仮定を行なわず荷重質量を厳密に考慮する場合などに関しては目下研究中である。

参考文献

- (1) 山崎徳也・崎山毅「円形曲り梁の走行荷重による強制振動」土木学会西部支部論文集(昭42.2)
- (2) 山崎徳也・崎山毅「円形曲り梁の面外自由振動」九大工学集報 第40巻 第2号(昭42.3)
- (3) 平井敦・伊藤学「長径間鉄道吊橋の活荷重による変形と衝撃」鉄道吊橋の実用性に関する基礎研究の報告(昭41)
- (4) N.W.Mclachlan "Theory and application of Mathieu Function" Oxford at the Clarendon Press P.20, 133