

走行荷重による一対辺固定、他対辺単純支承 矩形板の強制振動

九州大学 工学部 正員 山崎徳也

〃 〃 〃 〇横田 漢

1. 緒言

橋梁に作用する活荷重には種々あるが、そのうち列車、自動車などの走行荷重が最も重要であり、かかる荷重を受ける場合について、桁と見做しうる鉄道プレートガーダー橋などの研究は古くから数多くなされており¹⁾、ほとんど究明されていると言っても過言ではない。しかし、道路橋のゴビンは桁と見做すよりはむしろ板として取り扱う方が妥当であり、かかる分野の既往研究として、Modal Analysis による平井氏²⁾の解法や板の自重を無視したうえで板を異質バネ定数をもつスプリングで置換した成岡、平井氏³⁾の研究などがあるに過ぎず、今後解明すべき問題が多い。かかる観点より、著者は板の振動に関する研究を行ってきたが、本論文は先に報告した周辺単純支承矩形板に走行荷重が作用する場合の解法⁴⁾に引き継ぎ、同様の手法を用いて一対辺固定、他対辺単純支承矩形板の走行荷重による動的応答の解法を提示するものである。

2. 解法

強制力 $p(x, y, t)$ と受ける等方性平板の振動は、荷重質量による慣性力を無視すれば一般に次のように微分方程式で表わされる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p(x, y, t)}{D} \quad (1)$$

ただし w : 任意点 (x, y) の t 時刻における板のたわみ, h : 板の厚さ,
 ρ : 板の密度, D : 板剛度

図-1 に示すように矩形板において、辺 OA を x 軸、辺 OB を y 軸とし、辺 OA と辺 OB の長さをそれぞれ a , b とする。いま、図に示す任意走行荷重 $p(x, y, t)$ が点 $(0, y_0)$ より一定速度 v で x 軸に平行に移動するものと考え、しかるとし、式(1)は次式の如く表わされる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{a^4}{D} p(\xi, \eta, \tau) \quad (2)$$

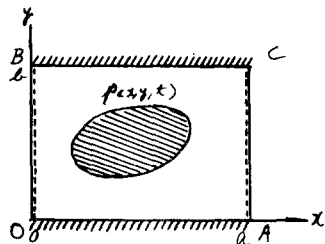


図-1

ただし $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $k = v a \sqrt{\rho h/D}$, $\tau = v t/a$, $\epsilon = b/a$
 走行荷重 $p(\xi, \eta, \tau)$ を二重正弦フーリエ級数に展開すれば次式の如くなる。

$$p(\xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \sin m\pi\tau \quad (3)$$

ここに、種々の走行荷重に対する f_{mn} の諸値は表-1 の如くである。

よって、図-1 に示す矩形板の境界条件は次式で与えられる。

$$\xi = 0, 1; \quad w = 0, \quad M_{\xi} = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) = 0$$

$$\eta = 0, 1, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (4)$$

式(2)の余函数を w_0
 , 特殊解を w_1 とす
 ば式(2)の一般解 w は
 次式で表わされる。

$$w = w_1 + w_0 \quad (5)$$

図-1 に示すごと
 主矩形板の自由振動

Case		p_{mn}		
①	矩形分布	$\frac{16\delta}{\pi^2} \times \frac{\sin m\pi\xi}{m} \frac{\sin n\pi\eta}{n} \sin n\pi\eta$	①	
②	集中	$\frac{4P}{ab} \sin n\pi\eta$	②	
③	線形分布	$\frac{8\delta}{b\pi} \times \frac{\sin m\pi\xi}{m} \sin n\pi\eta$	③	
④	線形分布	$\frac{8\delta}{a\pi} \times \frac{\sin n\pi\eta}{n} \sin m\pi\eta$	④	

の解に w_1 は周知のごとく一般に次式で与えられる。

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_{1mn} \left\{ \bar{A}_{mn} \sin \frac{\pi}{l} \mu_{0mn} \tau + \bar{B}_{mn} \cos \frac{\pi}{l} \mu_{0mn} \tau \right\} \quad (6)$$

ただし $\bar{w}_{1mn}$ および μ_{0mn} はそれぞれ m, n 次の振動モードおよび固有円振動数であり、
 また、 $\bar{A}_{mn}, \bar{B}_{mn}$ は初期条件より定まる未定係数である。

また、図-1 に示すごとく主矩形板の強制振動の解に w_0 を次式のごとく仮定する。

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(\xi, \eta) \sin m\pi\xi \quad (7)$$

式(3), (7)を式(2)に代入のうえ整理すれば次式を得る。

$$\frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial w_{mn}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 w_{mn}}{\partial \eta^2} - (km\pi)^2 w_{mn} = \frac{a^4}{D} p_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (8)$$

式(8)の余函数および特殊解をそれぞれ w_{1mn} および w_{0mn} とし、次式を仮定する。

$$w_{1mn} = Y_{mn}(\eta) \sin m\pi\xi \quad (9)$$

$$w_{0mn} = f_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad \text{すなわち } f_{mn} \text{ は任意定数。} \quad (10)$$

式(9)を式(8)の齊次方程式に代入すれば $Y_{mn}(\eta)$ が次式のごとく決定される。

$$Y_{mn}(\eta) = A_{mn} \sinh \pi \lambda_{mn} \eta + B_{mn} \cosh \pi \lambda_{mn} \eta + C_{mn} \sinh \pi \lambda'_{mn} \eta + D_{mn} \cosh \pi \lambda'_{mn} \eta \quad (11)$$

ただし $\lambda_{mn}^2 = \xi^2 (m^2 + u)$, $\lambda'_{mn}^2 = \xi^2 (m^2 - u)$, $u = km/\pi$ であり、 A_{mn}, D_{mn} は積分定数である。

式(10)を式(8)に代入すれば f_{mn} が求まり次式のごとく求まる。

$$f_{mn} = \frac{a^4}{D} \times \frac{p_{mn}}{\pi^4 \{ (m^2 + n^2/\xi^2)^2 - u^2 \}} \quad (12)$$

式(9), (10), (11), (12)より式(8)の一般解 w_{mn} が次式のごとく求まる。

$$w_{mn} = (A_{mn} \sinh \pi \lambda_{mn} \eta + B_{mn} \cosh \pi \lambda_{mn} \eta + C_{mn} \sinh \pi \lambda'_{mn} \eta + D_{mn} \cosh \pi \lambda'_{mn} \eta) \sin m\pi\xi$$

$$+ \frac{a^2}{D} \times \frac{f_{mn}}{\pi^4 \{ (m^2 + \pi^2/\epsilon^2)^2 - \mu^2 \}} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (13)$$

式(13)を式(4)の境界条件式に代入すれば積分定数 $A_{mn} \sim D_{mn}$ が次式の如く求まる。

$$A_{mn} = f_{mn} A'_{mn}, \quad B_{mn} = f_{mn} B'_{mn}, \quad C_{mn} = f_{mn} C'_{mn}, \quad D_{mn} = f_{mn} D'_{mn} \quad (14)$$

次に

$$\begin{aligned} A'_{mn} &= \frac{\alpha \cosh \pi\beta - \beta \cosh \pi\alpha + 2\lambda'_m \{ 1 - (-1)^n (\cosh \pi\lambda'_m - \cosh \pi\lambda_m) \}}{-4\gamma - \alpha^2 \cosh \pi\beta + \beta^2 \cosh \pi\alpha} \eta \\ B'_{mn} &= \frac{\lambda_m \sinh \pi\lambda'_m \{ \cosh \pi\lambda'_m - (-1)^n \} - \lambda'_m \sinh \pi\lambda_m \{ \cosh \pi\lambda'_m - (-1)^n \}}{4\gamma + \alpha^2 \cosh \pi\beta - \beta^2 \cosh \pi\alpha} \cdot 2\eta \\ C'_{mn} &= \frac{\lambda_m \{ (-1)^n (\cosh \pi\lambda'_m - \cosh \pi\lambda_m) + 1 \} + \lambda'_m \sinh \pi\lambda_m \sinh \pi\lambda'_m - \lambda_m \cosh \pi\lambda_m \cosh \pi\lambda'_m}{-4\gamma - \alpha^2 \cosh \pi\beta + \beta^2 \cosh \pi\alpha} \cdot 2\eta \\ D'_{mn} &= -B'_{mn}, \quad \alpha = \lambda_m - \lambda'_m, \quad \beta = \lambda_m + \lambda'_m, \quad \gamma = \lambda_m \lambda'_m \end{aligned}$$

他方、式(2)の一般解 w は式(5), (6), (7)より次式で表わされる。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_{mn} \left[\bar{A}_{mn} \sin \frac{\pi^2}{\epsilon} \mu_{mn} \tau + \bar{B}_{mn} \cos \frac{\pi^2}{\epsilon} \mu_{mn} \tau \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(\xi, \eta) \sin m\pi\tau \quad (15)$$

いま、次の如く初期条件を与える。

$$\tau = 0; \quad w = \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0 \quad (16)$$

式(15)を式(16)に代入すれば未定係数 $\bar{A}_{mn}$, $\bar{B}_{mn}$ がそれぞれ次の如く求まる。

$$\bar{A}_{mn} = -w_{mn}(\xi, \eta) \times \frac{k m}{w_{mn} \cdot \pi \cdot \mu_{mn}}, \quad \bar{B}_{mn} = 0 \quad (17)$$

式(17)を式(15)に代入すれば、結局本題の矩形板に走行荷重が作用する場合のたわみの動的応答式が次の如く算定されることになる。

$$w = \frac{a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f'_{mn} w'_{mn}(\xi, \eta) \left\{ \sin m\pi\tau - m\pi \frac{\sin \mu_{mn} \tau}{\mu_{mn}} \right\} \quad (18)$$

次に

$$f'_{mn} = \frac{f_{mn}}{\pi^4 \{ (m^2 + \pi^2/\epsilon^2)^2 - \mu^2 \}}, \quad \mu_{mn} = \frac{\pi^2 \mu_{mn}}{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} w'_{mn}(\xi, \eta) &= (A'_{mn} \sinh \pi\lambda'_m \eta + B'_{mn} \cosh \pi\lambda'_m \eta + C'_{mn} \sinh \pi\lambda'_m \eta + D'_{mn} \cosh \pi\lambda'_m \eta) \sin m\pi\xi \\ &\quad + \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \end{aligned}$$

3. 計算例

集中荷重が $\eta_0 = 0.5$ の線上を移動する場合について式(18)のたわみを算定すれば次の通りである。

表-1に3つの case (2) の f_{mn} を式(18)に代入すれば本例のたわみ w は次式の内容となる。

$$w = \frac{4P_0 a^2}{D \cdot \epsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f'_{mn} \cdot w'_{mn}(\xi, \eta) \left\{ \sin m\pi\tau - m\pi \frac{\sin \mu_{mn} \tau}{\mu_{mn}} \right\} \quad (19)$$

$$f_{mn} = \frac{\sin n\pi\eta_0}{\pi^2[(m^2+n^2/\varepsilon^2)-\mu^2]}$$

板の辺長比 $\varepsilon = 1$ の場合における式(19)の f のみも、速度パラメータ $k = 2\alpha\sqrt{5}k/D = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$ に対して算出し、板の中央 $\xi = \eta = 0.5$ における動的 f の影響線も、 $k = 0$ に対するいわゆる静的 f の影響線とともに図示すれば、図-2の結果となる。

また、 $k = 1.0$ に対して、ある瞬間における荷重位置と f の曲線を荷重走行線上より $\eta = 0.5$ の断面に投影して算出し、図示すれば図-3の結果となる。

なお、上記 f の算出に当り、厳密には m, n について無限数の f_{mn} の値が必要であるが、ここでは $m, n = 1, 2, 3$ のみで計算を行った。

図-2より、 k の値するなり速度の増加とともに、中央部に最大 f を生ぜしめる荷重の位置は漸次右側にずれ、また静的つり合いからの変動はその振幅が大きくなるが、その周期および振動数は k の値のいかんにかかわらず、同じ矩形板の自由振動におけるそれらとほぼ等しいことが読み取れる。

さらに、 f の増加率に関しては、本例においては $k = 0.5$ の場合が最大である。

4. 結論

本法の二重級数の収束は極めて早く、算例における f の応答計算では収束判定値を 10^{-6} とした場合、 $m = n = 10$ 項までで収束すると認められた。

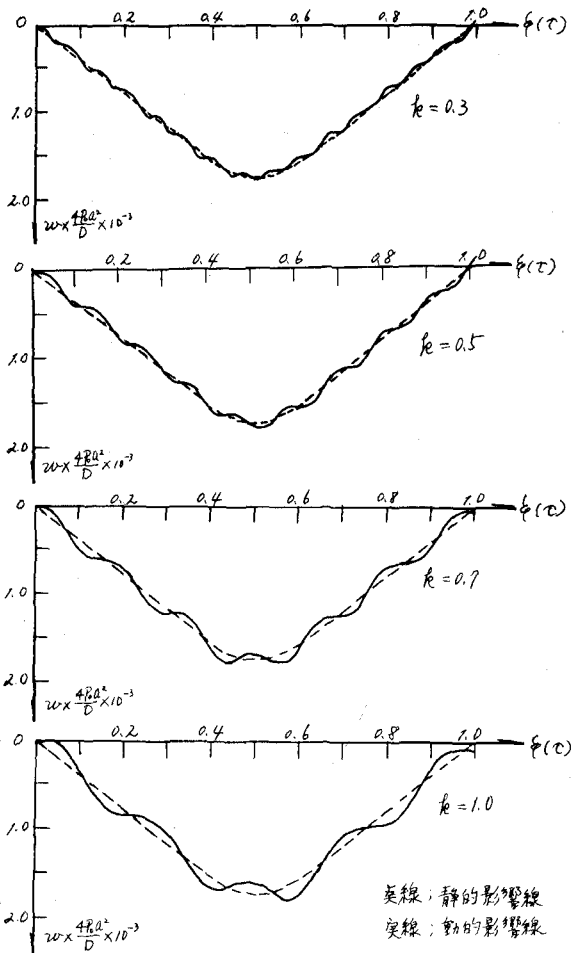


図-2

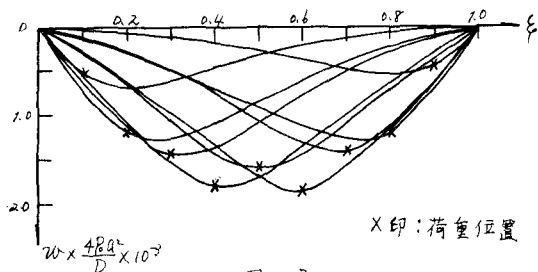


図-3

- (参考文献) 1) 例へば 三瀬 国井: 「走行荷重に因る橋桁の強制振動」, 九大理工工学研究所報告 1-1 (1943) Timoshenko: "On the forced vibration of bridge", Phil Mag, 43, (1922)
2) 平井: 「移動荷重を受ける相対2辺単純支持, 他2辺自由なる直交異方性板の振動性状について」, 土木学会論文集, 第92号, 昭和38年4月
3) 成岡平井: 「走行荷重による矩形板の振動に関する一研究」土木学会論文集, 第92号
4) 山崎 博由: 「走行荷重による四辺単純支持矩形板の強制振動」九大工学部1巻
5) ここでは動的増加率とは $(w_d - w_s) \times 100 / w_s$, w_d : 動的最大 f のみ, w_s : 静的最大 f のみ