

熊本大学 正員 ○ 平井 一男
 同 同 吉村 虎蔵
 同 同 田久 英明
 九州大学 加藤 勝敏

まえがき

筆者等はこれまで異なった種類の外力を使用して、いくつかの要素を結合し、アーチ橋・吊橋・格子構造・弾性支承梁などの解析を行ってきた。ここでは新たに曲げ荷重と仮称する外力を使用して、連続体中にヒンジを作りだしながら固有値問題の基礎式を誘導しようとするものである。この方法によれば、始めにヒンジを無視した振動系の固有値・固有ベクトルがわかっておれば与系の基礎式はきわめて簡単に決定することができ、またその数値計算も容易である。さらにこの解析法は筆者等がこれまで行ってきた単位構造物を結合するという解析手法とを組合せばその適用範囲は非常に広がる。ここでは始めにこの解析法の原理を述べ、その簡単な例としてゲルバー梁に適用した場合について解析を進めてみたい。

解析原理

周期モーメント荷重 $M_0 \sin \omega t$ がある振動系に作用するとき (fig-1), そのレスポンスは次式にて与えられる。

$$W = \left[W_s + \sum \Omega_n \Phi_n(x_i) \Phi_n'(x_j) \right] M_0 \sin \omega t \quad (1)$$

$$\text{ここに } \Omega_n = \frac{\omega^2}{\omega_n^2 (\omega_n^2 - \omega^2)}$$

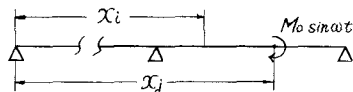


fig-1

W_s : 単位の静的モーメント荷重 ($M_0=1$) が作用するときの静的たわみ。

$\Phi_n(x)$: n 次の正規化した振動モード。

x_i : 測定点の座標

ω_n : n 次の固有振動数。

x_j : 荷重点の座標

上式の関係を使用すれば fig-2 に示すような曲げ荷重 (Δx_j は無限小の微小区間に作用する等大逆方向の一対のモーメント荷重) が作用する時, そのレスポンスは式(2)にて与えられる。

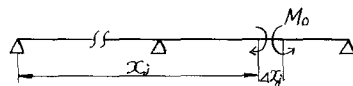


fig-2

$$W = \left[W_{SM} - \sum \Omega_n \Phi_n(x_i) \Phi_n''(x_j) \right] M_0 \cdot \Delta x_j \quad (2)$$

ここに W_{SM} : 単位の静的曲げ荷重 $M_0 \Delta x_j = 1$ による静的レスポンス

式(2)の $M_0 \cdot \Delta x_j$ を新しい一つの外力と考え、これを曲げ荷重とよび M_M にて表わすことにする。
 $\sin \omega t = 1$ においては式(2)は式(3)となる。

$$W = \left[W_{SM} - \sum \Omega_n \Phi_n(x_i) \Phi_n''(x_j) \right] M_M \quad (3)$$

たねみ(レスポンス)が決定されたならば任意の点の曲げモーメントは周知の次式より求められる。

$$M^B = -EI_x \frac{d^2 W}{dx^2}$$

式(3)に使用すれば

$$M^B = \left[M_{SM}^B + \sum EI_x \Omega_n \Phi_n''(x_i) \Phi_n''(x_j) \right] \cdot M_M \quad (4)$$

ここに M_{SM}^B : $M_M = 1$ による静的曲げモーメント荷重

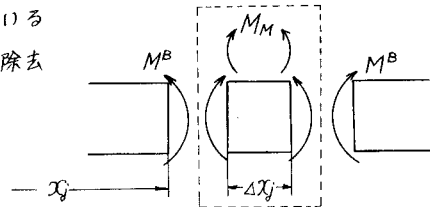
梁が一様な場合には

$$M^B = \left[M_{SM}^B + EI_0 \sum \Omega_n \Phi_n''(x_i) \Phi_n''(x_j) \right] \cdot M_M \quad (5)$$

今後解析を簡単にするために、一様断面梁を使用することにする。今荷重点付近の M_M と M^B とを拡大して示すと fig-3 のようになる。

Δx_j の微小部分は力の釣合に関する限り釣合っているはずであるからこの部分(点線で囲んだ部分)だけ除去することができる。さらにもし

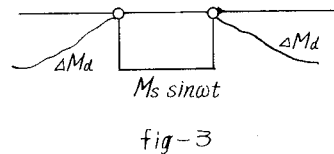
$$M^B = 0 \quad (6)$$



であれば Δx_j の部分はピンと置き換えることができる。

式(6)の関係を式(5)に使用して振動数方程式を次式のように求めることができる。

$$M_{SM}^B + EI_0 \sum \Omega_n \Phi_n''(x_j) \Phi_n''(x_j) = 0 \quad (7)$$



上述の解析よりわかるように、 M_{SM}^B , Ω_n , $\Phi_n(x)$, $\Phi_n''(x)$ が求まっているならば、その系にヒンジができた場合、構造物の種類には関係なく上述の解析手法が適用される。式(7)より求めた m 次の固有振動数 ω_m を式(3)に代入すれば、 ω_m に対応する振動モード $\Phi_m(x)$ が決定できる。すなわち、

$$\Phi_m(x) = W_{SM} - \sum \frac{\omega_m^2}{\Omega_n^2 (\omega_n^2 - \omega_m^2)} \cdot \Phi_n(x) \Phi_n''(x) \quad (8)$$

一例として、 $1/2$ 点にヒンジがある単純梁について考えてみよう。この場合、

$$M_{SM}^B = 0, \quad \omega_{gn}^2 = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{S}, \quad \Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{Sl}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (9)$$

上の関係を式(7)に代入して式(10)を得る。

$$\sum \frac{1}{n^4 \lambda^2 - 1} = 0 \quad (10)$$

$$\text{ここに } \lambda = \frac{\omega g_1}{\omega} \quad \omega g_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

対称振動の場合には、この与系はスパン $l/2$ の自由-単純支持の境界条件をもつ梁と等価である。この等価梁の厳密解はすでに求められていて、最低次の振動次数のものについては、 $\lambda^2 = 0.025610$ である。式(10)はこの値に対して成立する。

上述の解析手法はヒンジが数個ある場合についても全く同様な解析過程をくり返して基礎式を誘導することができる。さらにこの解析は(弾性)支承などの条件と組合せた解析を進めることができる。一例としてfig-4(a)に示すようなゲルバー梁について考えよう。

このような系に対しては始めにfig-4(b)に示す単純梁(スパン l)を考え、これに曲げ荷重 M_M と集中荷重 P とを作用させる。このときのたわみ $\mathcal{W}$ と曲げモーメント M^B とは次式より求められる。

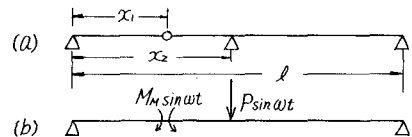


fig-4

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{W} &= \left[\mathcal{W}_{SM} + \sum \Omega_n \Phi_n(x) \Phi_n''(x_1) \right] \cdot M_M + \left[\mathcal{W}_{SP} + \sum \Omega_n \Phi_n(x) \Phi_n(x_2) \right] \cdot P \\ M^B &= \left[M_{SM}^B + \sum \Omega_n \Phi_n''(x) \Phi_n''(x_1) \right] \cdot M_M + \left[M_{SP}^B + \sum \Omega_n \Phi_n''(x) \Phi_n(x_2) \right] \cdot P \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに

$\mathcal{W}_{SP}$: 単位の P による静的たわみ

M_{SP}^B : 単位の P による静的曲げモーメント

$\mathcal{W}_{SM}$: 単位の M_M による静的たわみ

M_{SM}^B : 単位の M_M による静的曲げモーメント

与系は $x = x_2$ において $\mathcal{W} = 0$

$x = x_1$ において $M^B = 0$

この条件を式(11)に入れると

$$\left. \begin{aligned} \left[\mathcal{W}_{SM2} + \sum \Omega_n \Phi_n(x_2) \Phi_n''(x_1) \right] M_M + \left[\mathcal{W}_{SP2} + \sum \Omega_n \{ \Phi_n(x_2) \}^2 \right] P &= 0 \\ \left[M_{SM1}^B + \sum \Omega_n \{ \Phi_n''(x_1) \}^2 \right] M_M + \left[M_{SP1}^B + \sum \Omega_n \Phi_n''(x_1) \Phi_n(x_2) \right] P &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに $\mathcal{W}_{SM2}$: x_2 点における単位の M_M による静的たわみ

$\mathcal{W}_{SP2}$: x_2 点における単位の P による静的たわみ

M_{SM1}^B : x_1 点における単位の M_M による静的曲げモーメント

M_{SP1}^B : x_1 点における単位の P による静的曲げモーメント

式(12)より与系の振動数方程式は次のように求められる。

$$\begin{vmatrix} \mathcal{W}_{SM2} + \sum \Omega_n \Phi_n(x_2) \Phi_n''(x_2) & \mathcal{W}_{SP2} + \sum \Omega_n \{\Phi_n(x_2)\}^2 \\ M_{SM1}^B + \sum \Omega_n \{\Phi_n''(x_1)\}^2 & M_{SP1}^B + \sum \Omega_n \Phi_n''(x_1) \Phi_n(x_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

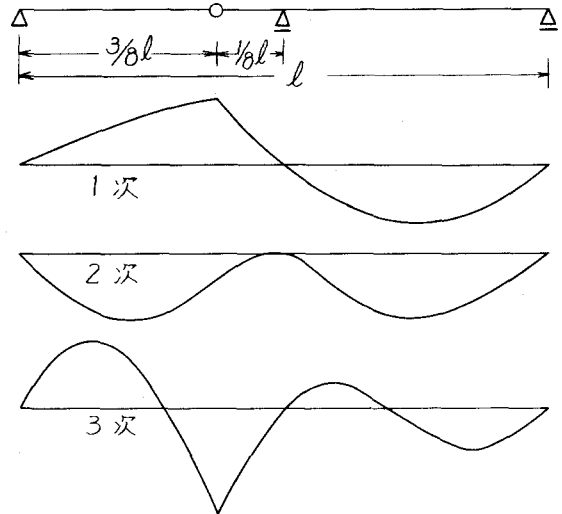
上式より固有振動数 ω_m を決定し、これを式(12)に使用すれば、 M_M と P との比が与えられる。この比を式(11)の第1式に使用すれば振動モードを決定することができる。上式の理論の妥当なことを検討するために、与系を9つの集中Massを持つゲルバー梁に置き換え、この固有値とモードとを求め、それを上述の解析法で求めたものと比較した。両者の比較を次に示した。

固有振動数比較

解法	提案の方法	集中質量法
$\bar{\omega}_1$	30.81	29.86
$\bar{\omega}_2$	61.57	61.58
$\bar{\omega}_3$	112.5	97.36

ただし $\bar{\omega}^2 = \omega^2 / \left(\frac{EI}{Pl^4} \right)$

振動モード



おすび

上述の解析過程よりわかるように、提案の方法は始めにヒンジを無視した基本系を考え、それにヒンジを作り出すことにより基礎式を導いている。ヒンジを無視した振動系の固有値・固有ベクトルが与えられている限り任意の構造物に適用できる。また、式(10)よりわかるように単純梁の固有値と固有ベクトルとはきわめて簡単に求められるので、もし基本系として単純梁が使用できれば上記の解析あるいは数値計算が容易となる。