

岐阜大学工学部 正負 O 井 上 肇

同 上

時 泉 公 生

1. 序 アーチの振動については, Waltring¹⁾ が, 軸線の伸びと考慮して, 円形スピンゴアーチについて, その振動モードとその固有振動数とを求めている。アーチが固定端とつながり, 曲率や断面が変化するときには, 近似的方法でその解を求めなければならなくなる。ここでは Waltring によるアーチの運動方程式から出発し, その近似解法として, 階差法を用いてアーチの自由振動の固有振動数とその振動モードとを計算したものである。

2. 運動方程式とその階差表示

アーチの曲率半径を R , 断面二次モーメントを J , 断面積を A , アーチ材料の弾性係数を E とし, 次のような釣合い条件式が得られる。(図-1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + N + XR &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial \theta} - Q + ZR &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \theta} - QR &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{EA}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - u \right) \\ M &= -\frac{EI}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} (2)$$

(1) より, R は θ の関数であるから

$$\left. \begin{aligned} R \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{\partial M}{\partial \theta} + NR + XR^2 &= 0 \\ R \frac{\partial N}{\partial \theta} - \frac{\partial M}{\partial \theta} + ZR^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

A, J, R は θ の関数であることを考慮して, (3) に (2) を代入し, 得られた u, w についての Diff. Eq. とその階差式表現に直すのが, 通常の手続きではあるが, それによって得られたアーチの Stiffness Matrix は変断面, 変曲率のため, 一般には対称とはならず, 相互作用の定理が成立しない不合理が現われてくる。(したがって微係数の階差式表現と, 同時に, (3) および (2) について用いることを試みた。これは, あるいは誤差と多く含む可能性もあるが, 少なくとも, 変断面の場合においては, Maxwell-Betti の定理の成立と目標とした。アーチとその中心角と等間隔入に分割し, たとえば, 普通精度の階差表現を用いて, (3) は

$$\left. \begin{aligned} (R\lambda C_1 + 2C_1) \bar{M}_i + 2\lambda^2 R_i C_2 \bar{M}_i + 2\lambda^2 X_i R_i^2 &= 0 \\ \lambda R_i C_3 \bar{M}_i - \lambda C_3 \bar{M}_i + 2\lambda^2 Z_i R_i^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_i &= -E \left(\frac{J}{R_i^2} \right) (K_{1i} \bar{U}_i + K_{2i} \bar{W}_i) \\ R_i \bar{M}_i &= E \left(\frac{A_i}{R_i} \right) R_i (-2\lambda^2 K_{3i} \bar{U}_i + K_{4i} \bar{W}_i) \end{aligned} \right\} (5)$$

ここで λ はオイラーの分割角を意味し, $\lambda_i = R_i \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_i} \right)$, J_0, A_0, R_0 は基準の J, A, R である。

また, $C_1 = [1, -2, 1]$, $C_2 = [0, 1, 0]$, $C_3 = [-1, 0, 1]$, $\bar{M}_i = \{M_{i-1}, M_i, M_{i+1}\}$, $\bar{U}_i = \{U_{i-1}, U_i, U_{i+1}\}$

$\bar{W}_i = \{W_{i-1}, W_i, W_{i+1}\}$, $K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, K_{4i}$ (3, 5) の係数行列等がある。

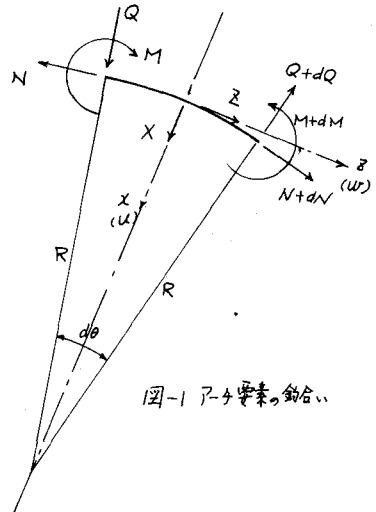


図-1 アーチ要素の釣合い

(4) に (5) を代入して

$$\begin{bmatrix} (\beta\lambda C_3 + \mu C_1) K_{ii} + \beta a_0 d_i C_3 K_{ii} & (\beta\lambda C_3 + \mu C_1) K_{ji} - \beta a_0 d_i C_3 K_{ji} \\ -\lambda C_3 K_{ii} + \beta a_0 d_i \lambda C_3 K_{ii} & -\lambda C_3 K_{ji} - a_0 d_i C_3 K_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \end{bmatrix} = \frac{\beta^2}{EJ_0} R_0^4 d_i^2 \begin{bmatrix} X_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

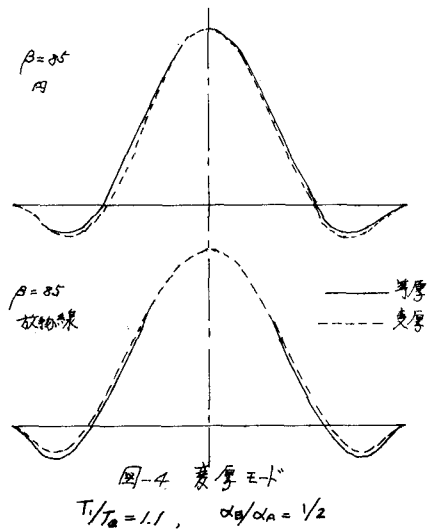
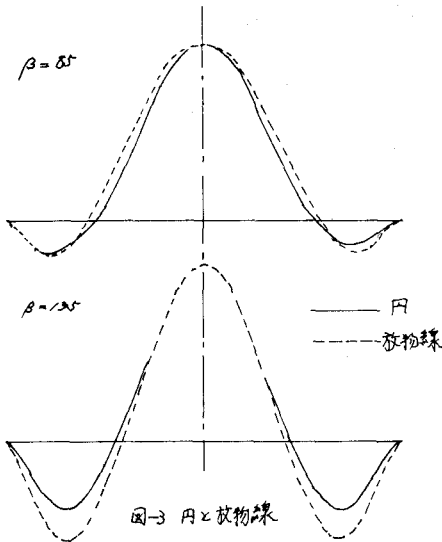
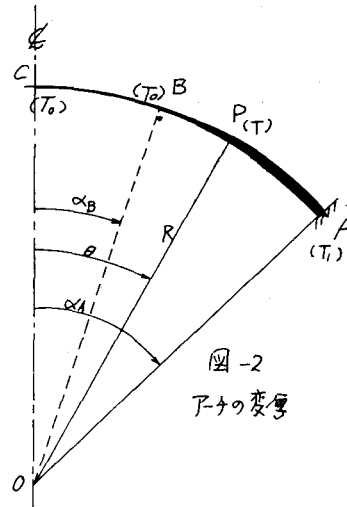
μ, β ; 使用する各差表現の精度によりきまるもの、通常精度では $\mu=2, \beta=2\lambda^2$, $d_i = R_i/R_0$, $a_0 = \frac{(\frac{A}{R_0}) R_0}{(\frac{J_0}{R_0^2})}$
 (6) を用いて, アーチ全体の Stiffness Matrix を作る事ができる。振動状態にあるとき, 外力の項 X_i, Z_i は, 慣性項として取扱ってよい。したがって, 行列表示とを用いて, 運動方程式が作成できる。

3. 計算例

取扱ったアーチの形は, 円と放物線, 厚さの変化は $T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{1 - \cos(\theta - \alpha_0)}{1 - \cos(\alpha_B - \alpha_0)}$ とした。計算は, 両端固定の対称アーチについて行ない, 計算制の制約から, アーチを 12 等分した。

曲率の変化の影響および断面変化的の影響と示すために, 同一のスパン (円と半径 50m, 中心角 $2 \times 36^\circ 51' 12''$, $l_0 = 60m$), 同一の断面 (アーチラウレンについて) のアーチについて, その対称 (A に関して) の最低次振動のモードを, それぞれ, 図-3, 4 に示す。ここで β は アーチのスパンと断面の関係と示す 1 つのパラメーターであって

$$\beta = l_0 / \sqrt{\frac{J_0}{A}} \quad \text{である。}$$



- 1) Wolkoff; Schwingungszahlen u. Schwingungsformen von Kreisbogenträgern, Ing.-Arch., Bd. 5, S. 429-449, 1934
 2) Mah, Gordon B.; Numerical Analysis of Noncircular Cylindrical Shells, ASCE, Vol. 93, EM3, p. 219-237, 1967