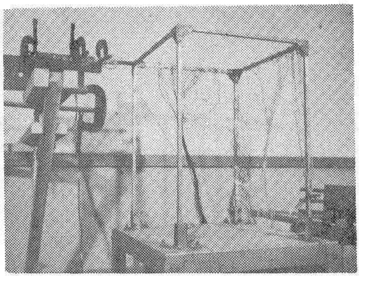
I－142

立体ラーメンの振動解析と考察

東北大学工学部　正　員　　佐武　正雄
東北大学工学部　学生員　○広田　喜宥

〔1〕まえがき

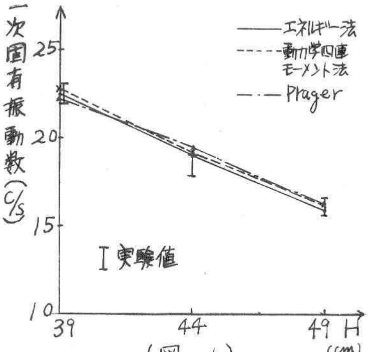


（写真－1）

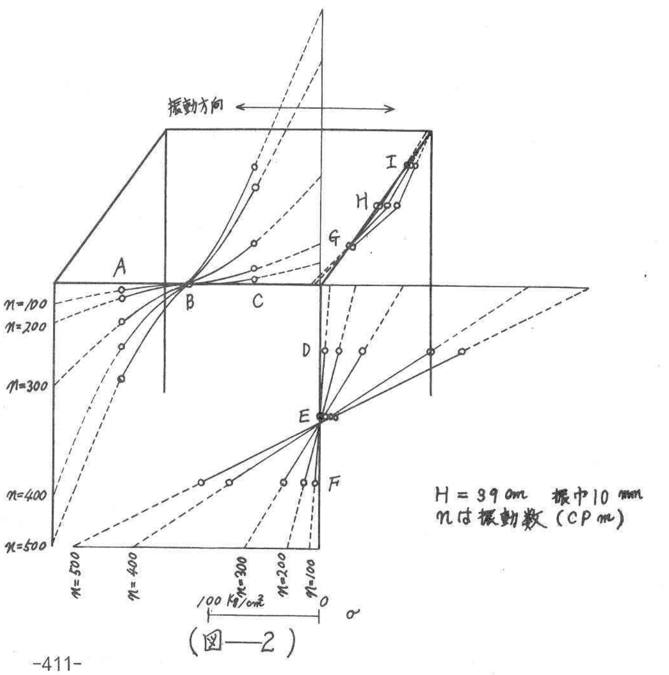
立体ラーメンの振動解析は近似解法として平面ラーメンに置き換える方法，エネルギー法等がある。現在は電子計算機の大型化とマトリックス解析法の進歩により立体としての解析が実用的になろうとしている。ここでは一層対称門型立体ラーメンを例にとり水平一次振動について平面として解く方法の妥当性やマトリックス法によって立体のまま解析する方法について述べ，考察を行ったものである。

〔2〕平面ラーメンに置換する方法とその考察

振動方向に直角な梁の質量を2等分して両端に集中質量として加えれば平面ラーメンに帰着する事が出来る。その妥当性を考察するため(写真－1)に示す模型(柱長H＝39, 44, 49 cm 梁長39 cm, 部材断面 $1^{cm} \times 1^{cm}$, $E = 1.03 \times 10^6$ Kg/cm², 単位長当り重量 $m = 8.55$ g/cm) について実験及び計算を行った。平面ラーメンとして解く場合には多くの解き方があるがエネルギー法，動力学四連モーメント法，Prager[2] の式で計算すると(図－1)に示すようになる。この結果より平面として解析しても十分な近似値が得られることがわかる。模型により実測した梁，柱の応力分布の一例を(図－2)に示す。これによれば振動方向に垂直な梁の応力は他に比して極めて小さく，振動時，直線を保ったまま変位していると考える事が出来る。この事から柱や梁の剛性の大きい場合には平面ラーメンとして取り扱う事が妥当であると考えられる。



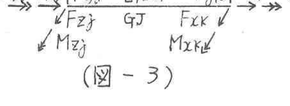
(図－1)



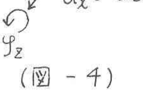
(図－2)

〔3〕マトリックス法による振動解析

立体ラーメンの1エレメントjKの両端に作用する外力(図－3)とそれ



(図－3)



(図－4)

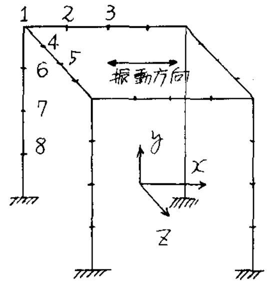
によって起される変位(図－4)との関係式は（1）式で表わされる．これはx軸に平行な場合であるが

$$
\begin{Bmatrix} F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \\ F_{zk} \\ M_{xk} \\ M_{yk} \\ M_{zk} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI/l^2 & 0 & -12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/l^2 \\
0 & 0 & 12EI_y/l^3 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/l^3 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & GJ/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ/l & 0 & 0 \\
0 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 & 4EI_y/l & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/l^2 & 0 & 2EI_y/l & 0 \\
0 & 6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/l & 0 & -6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/l \\
-EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/l^2 & 0 & 12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/l^2 \\
0 & 0 & -12EI_y/l^3 & 0 & 6EI_y/l^2 & 0 & 0 & 0 & 12EI_y/l^3 & 0 & 6EI_y/l^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -GJ/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GJ/l & 0 & 0 \\
0 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 & 2EI_y/l & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/l^2 & 0 & 4EI_y/l & 0 \\
0 & 6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/l & 0 & -6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/l
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_{xj} \\ u_{yj} \\ u_{zj} \\ \varphi_{xj} \\ \varphi_{yj} \\ \varphi_{zj} \\ u_{xk} \\ u_{yk} \\ u_{zk} \\ \varphi_{xk} \\ \varphi_{yk} \\ \varphi_{zk} \end{Bmatrix}
\quad \cdots\cdots (1)
$$

y軸z軸に平行な梁に関しても同様の式が得られる．

一層対称門型ラーメンを(図－7)の如くに32の部分に分割して計算する．水平一次振動固有振動を取り扱う場合には，梁の対称，逆対称条件と支端の変位が0という条件を用いて，1点～8点の外力と変位の関係を表わすスティッフネス・マトリックスを(1)式の重ね合わせによって作る．これをKとすると

$\mathbb{F} = \mathbb{K}\,\mathbb{U}$ ････(2)　（但し，$\mathbb{F}$は外力　$\mathbb{U}$は変位の列ベクトル）



(図－5)

慣性力の考え方は多質点系におきかえる方法，節点にかかる等価慣性力を導入する方法等が有るが，慣性力$\mathbb{F}$を$\mathbb{M}\omega^2\mathbb{U}$とおけば，

$\mathbb{K} - \mathbb{M}\omega^2 = 0$ ････････(3)

となり(3)式より固有円振動数ωを求める．

次にトランスファーマトリックス法を用いる方法について述べる．梁を多質点系として，柱はバネと考え，柱の質量の約30％を節合点に付加する．(この根拠は平面門型ラーメンの振動を計算した結果より出ている)．トランスファーマトリックス法は状態ベクトルの移行であるから1点から2点，3点→→→→5点，4点，1点と移行して元にもどれば(4)式となる．

$Z_1^L = P_1 F_{1-4} P_4 F_{4-5} \cdots\cdots P_3 F_{3-2} P_2 F_{2-1} Z_1^L = \mathbb{A}\, Z_1^L$（とおく）････(4)

これより，$\mathbb{A} = I$（Iは単位マトリックス）･･･････(5)　を満足するωが固有円振動数となる．

(5)式よりωが求められる．ここに，$\mathbb{P}$はポイントマトリックス，$\mathbb{F}$はフィールドマトリックスである．

〔4〕あとがき

以上立体ラーメンの振動解析について述べたが，マトリックス法による計算の比較や立体ラーメンの特性のあらわれる高次振動について更に検討を進めたいと思っている．

参考文献

1). H·C martin（吉識雅夫訳）：マトリックス法による構造力学の解析（培風館）

(2) W.Prager: Die Eigenschwingungen von Rahmenfundamenten

3). 佐武，広田　：立体ラーメンの振動解析（昭和42年度土木学会東北支部技術研究発表会講演概要　P.83）