

熊本大学	正員	吉村虎蔵
同	同	田久英明
佐世保重工	同	高村清
同	同	○藤本昭二

スヒンジアーチ橋、ランガー橋、ローゼ桁などでは鉛直振動の最低振動数は逆対称の一次振動であって、この振動数は対称一次振動に比べてきわめて低く、単支間の他の構造と著るしくその性質を異にする。このために上記のタイプの橋の $1/4$ 点のたわみは通常の場合 $1/2$ 点のたわみよりも大で、これらの橋の剛性を落す結果となっている。

筆者の一人は文献(1)において、アーチクラウンの水平変位を完全に拘束したとき、その固有振動数および剛性がどのように高くなるかについて発表した。その研究は、通常実際の上路式補剛アーチ橋が、解析に扱われるモデルの構造よりも格段に剛性が高いという多くの実験結果に着目して、試算したものであるが、今回は補剛桁あるいは縦桁などによってアーチクラウンを水平に弾性的に拘束した場合について、つまり実際の構造により忠実にモデルを取り上げ、その動的解析の方法を述べ、その拘束の効果を調べた結果について報告する。上路式アーチ橋では、トラス逆ランガー形式によるくとも、相当にその剛性を上げることができるとであろうし、逆対称振動数を高くすることができると思うからである。

1. 動的解析の理論

筆者等の論文(2)においてスヒンジアーチ橋、ローゼ桁、フリ橋、タイドアーチ橋などがランガー橋の動的解析の式と同じ式で解析できることが示されているので、ここでは逆ランガー橋について動的解析の基礎式を誘導すれば足りる。

解析のモデルとしては図-1のモデルを考える。

この鉛直振動モードは

$$\varphi(x) = \sum_n a_n \sin(n\pi x/l) \quad (1)$$

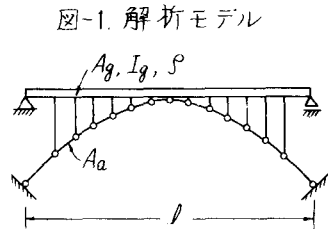
で表わされるが、対称振動のとき、クラウンは左右に不動であるから、補剛桁はアーチに水平拘束を与えない。また

逆対称振動のとき $n=4, 8, 12, \dots$ でもクラウンの水平振動はないから、補剛桁はアーチに水平拘束を与えることとなる。故に $n=1, 3, 5, \dots$; $n=4, 8, 12, \dots$ に対しては文献(2)の逆ランガー橋の式を用いればよい。 $n=2, 6, 10, \dots$ の変形に対するものだけが今の場合の問題となる。

アーチスパンの伸び Δl_a は文献(3)によれば

$$\Delta l_a = \sum_j \Delta x_j = \sum_j \Delta y_j \cdot \tan \alpha_j - \sum_j \sec \alpha_j \cdot \Delta s_j \quad (2)$$

ここに、 Δy_j は相隣る格点の相対鉛直たわみ、 α_j はアーチ材と水平との傾き、 Δs_j は軸力による材の伸び、アーチの変形の式(1)で与えられるから、アーチ軸線を放物線とすれば、式(2)の右辺第一項は



$$\begin{aligned}
 \sum_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \Delta y \cdot \tan \alpha &= \int_0^{\frac{l}{2}} \tan \alpha \cdot dx \\
 &= 0 \quad \text{for } n = 4, 8, 12, \dots \\
 &= \frac{16f}{l} \sum_{n=2} \frac{a_n}{n\pi} \quad \text{for } n = 2, 6, 10, \dots \\
 &= \frac{8f}{l} \sum_{n=1} \frac{a_n}{n\pi} \quad \text{for } n = 1, 3, 5, \dots
 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{x=0}^{x=l} \Delta y \cdot \tan \alpha &= \int_0^l \tan \alpha \cdot dx \\
 &= \frac{16f}{l} \sum_{n=1} \frac{a_n}{n\pi} \quad \text{for } n = 1, 3, 5, 7, \dots \\
 &= 0 \quad \text{for } n = 2, 4, 6, 8, \dots
 \end{aligned} \quad (4)$$

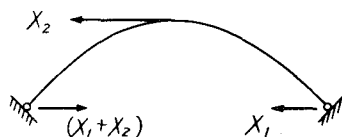
図-1 のアーチスパンは不変であるから常に

$$\Delta l a \Big|_0^l = \sum_{x=0}^{x=l} \Delta x = 0 \quad (5)$$

である。今の場合、 $n = 2, 6, 10, \dots$ に対して $\Delta l a$ の式(2)の右辺第一項は式(4)に示すように 0 であるから、第二項のみが残る。水平拘束力を X_2 とすれば、アーチの水平反力は図-2 のようになる。故に、

$$\begin{aligned}
 \Delta l a \Big|_0^l &= \sum_{x=0}^{x=l} \Delta s \cdot \sec \alpha \\
 &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(X_1 + X_2) \sec^3 \alpha}{A_a E} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{X_1 \sec^3 \alpha}{A_a E} dx \\
 &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{X_1}{A_a E} \sec^3 \alpha \cdot dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{X_2}{A_a E} \sec^3 \alpha \cdot dx \\
 &= 0 \\
 \therefore 2X_1 + X_2 &= 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

図-2 拘束力と反力



次に、 $n = 2, 6, 10, \dots$ の変形するときアーチクラウンの水平変位と補剛桁の伸びが等しいから、この

条件式をつくると $\frac{X_2 \cdot \frac{l}{2}}{A_g E} = \sum_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \Delta x = \int_0^{\frac{l}{2}} \tan \alpha \cdot dx - \int_0^{\frac{l}{2}} \Delta s \sec \alpha$

式(3)を参照して $= \frac{16f}{l} \sum_{n=2} \frac{a_n}{n\pi} - (X_1 + X_2) \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\sec^3 \alpha}{A_a E} dx$

$$\therefore \frac{16f}{l} \sum_{n=2} \frac{a_n}{n\pi} - (X_1 + X_2) \frac{l}{2} \left\{ 1 + 8\left(\frac{f}{l}\right)^2 + 19.2\left(\frac{f}{l}\right)^4 \right\} / A_a E \quad (7)$$

式(6)と(7)から

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -X_2/2 \\
 X_2 &= \frac{16EfB''}{\pi l^2} \sum_{n=2} \frac{a_n}{n} \\
 \text{ここに } B'' &= 4A_a A_g / \{ 2A_a + A_g (1 + 8\left(\frac{f}{l}\right)^2 + 19.2\left(\frac{f}{l}\right)^4) \}
 \end{aligned} \quad (8)$$

$n = 2, 6, 10, \dots$ よりなる振動モード $\varphi(x) = \sum_{n=2,6,10,\dots} a_n \sin(n\pi x/l)$ で自由振動するとき、アーチは放物線であるから、クラウンの左右では等大逆向きの等分布周期力 p_g が補剛桁に、アーチにも同様な等分布周期 p_a が働くことになる。このとき静力学的に次の関係がある。

$$p_a = X_2/2 \cdot \frac{8f}{l^2}$$

式(8)より

$$p_a = \frac{64Ef^2B''}{\pi l^4} \sum \frac{a_n}{n} \quad (9)$$

一方、等分布周期力 $p_g \sin \omega t$ が free body の補剛桁に働くときのたわみ $W(x)$ は、補剛桁のみに質量を考えると

$$\ddot{W} + \omega_{gn}^2 W = \Phi_{gn}(x) \int \Phi_{gn}(x) p_g dx \sin \omega t \quad (10)$$

を解いて次式となる

$$W(x) = \sum \frac{\Phi_{gn}(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left(\int \Phi_{gn}(x) p_g dx \right) \quad (11)$$

ここに、 ω_{gn} 、 Φ_{gn} はそれぞれ補剛桁のみの固有円振動数、正規化した固有振動モード。式(11)の積分は $l/2$ 点の左右で p_g の向きが異なるので二項に分けると、

$$\begin{aligned} W(x) &= \sum \frac{\Phi_{gn}(x)}{\omega_{gn}^2 - \omega^2} \left\{ \int_0^{l/2} \Phi_{gn}(x) p_g dx - \int_{l/2}^l \Phi_{gn}(x) p_g dx \right\} \\ &= \sum \frac{8p_g}{n\pi f(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (12)$$

式(9)の a_n は式(12)の $(Wn)_{\max}$ に対応するから、式(9)に式(12)の最大値を入れると、

$$p_a = \sum p_{an} = \frac{64Ef^2B''}{\pi l^4} \sum \frac{1}{n} \cdot \frac{8p_g}{n\pi f(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \quad (13)$$

式(13)は free body のアーチに p_a を、free body の補剛桁に p_g を働かせ両者の変形が等しいという条件から導かれた式である。アーチと補剛桁が一体となって自由振動するとき外力は働かないから、

$$p_a + p_g = 0 \quad (14)$$

式(14)に式(13)を入れると、 $n=2, 6, 10, \dots$ の形で振動するときの振動数方程式(15)が得られる。

$$1 + \frac{512Ef^2B''}{\pi^2 l^4 f} \sum \frac{1}{n^2(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} = 0 \quad (15)$$

ここに B' は式(8)参照。式(15)より ω_m を求め式(12)に入れると m 次の振動モードの式(16)が得られる。

$$\Phi_m(x) = \sum \frac{1}{n(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (16)$$

ここで、既に知られている対称振動、逆対称振動 ($n=4, 8, \dots$) について併記しておこう。

対称振動 $n=1, 3, 5, \dots$ では、振動数方程式は

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{512Ef^2B'}{\pi^2 l^4 f} \sum \frac{1}{n^2(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} &= 0 \\ \text{ここに } B' &= A_0 / \left\{ 1 + 8\left(\frac{f}{l}\right)^2 + 19.2\left(\frac{f}{l}\right)^4 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\text{振動モード } \Phi_m(x) = \sum \frac{1}{n(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (18)$$

逆対称振動のとき $n=4, 8, 12, \dots$ ではアーチの軸力が働かずに補剛桁のみの振動となり

$$\omega_m = \omega_{gn} = \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_2}{S}} \quad (19)$$

$$\Phi_m = \sqrt{\frac{2}{Pl}} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (20)$$

逆ローゼ、上路式スビンジャーチの動的解析については文献(2)の記述にならって式(15)~(20)を少し修正すればよい。

2. 数値計算

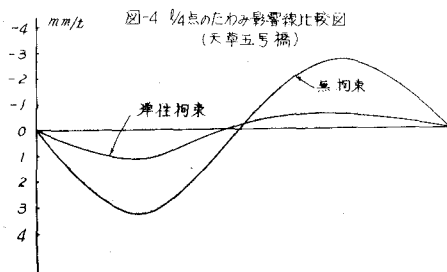
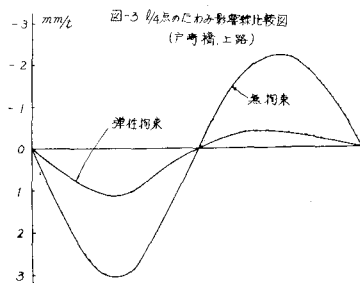
下路の戸崎ランガー橋の諸元を用いてそのまま逆ランガー橋とし、水平に弾性拘束を与えた場合を解き ω を比較すると表-1の通り。また、 $\frac{1}{4}$ 点のためみの影響線を比較すると図-3の通り。また、天草五号橋(スビンジパイプアーチ)について現設計のものと水平に拘束を与えた場合を比較して、表-2、図-4が得られる。

表-1 ω の比較 (rad/sec) (戸崎橋)

次数	下路	上路無拘束	上路弾性拘束	上路完全拘束
1	7.374	8.119	8.119	
3	10.287	11.499	11.499	
5	25.904	25.940	25.940	
2	4.136	4.136	7.975	10.794
4	16.542	16.542	16.542	
6	37.220	37.220	37.294	37.386

表-2 ω の比較 (rad/sec) (天草五号橋)

次数	無拘束	弾性拘束
1	8.309	8.309
3	16.408	16.408
5	25.130	25.130
2	3.968	7.579
4	15.871	15.871
6	35.709	35.777



3. おそび

上路式の逆ランガー橋、逆ローゼ橋、スビンジアーチ橋に水平弾性拘束を与えたときの動的解析の基礎式を誘導した。逆対称一次振動数は弾性拘束のときと無拘束のときと比べると約2倍位に高くなることが知られた。また $\frac{1}{4}$ 点のためみの影響係数は約3分の一となり格段に剛性が上がることが知られた。

【注】

- (1) 吉村, 田久, 瀬戸口, 水平変位の拘束によるスビンジアーチの動的, 静的挙動
土木学会年次講演会, (S. 42. 5)
- (2) 吉村, 平井, 補剛アーチ橋およびつり橋の動的共通解析
土木学会論文集第115号 (S. 40. 3)
- (3) 吉村, 平井, ランガー橋の動的解析 同上第101号 (S. 39. 1)