

東北大学工学部 正負 倉西 茂, 正負 高橋 龍夫

粘性抵抗を有する梁の振動は、粘性抵抗力が比較的小さい場合には、種々の近似解法が与えられている。又粘性抵抗力が等分布的に作用している場合の解も与えられる。

しかし、本文で扱うような、ある特定の位置に、かなり大きな粘性抵抗力（スポットダンパー）を与えた場合には、梁の振動性状はかなり複雑になるし、又従来の近似解法では満足されない点も多い。

粘性抵抗を有する梁を多値点系に置換した場合の運動方程式は、質量、粘性抵抗、剛性、外力の各行列を用いて次のように表わされる。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = [P] \quad \text{----- (1)}$$

(1)式をラプラス変換して複素行列で表示すれば次式を得る。

$$[A]\{\eta\} = \{P\} \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{但し } \mathcal{L}[y(x)] = \eta(s), \quad \mathcal{L}[\dot{y}(x)] = s\eta(s) - Y_1, \quad \mathcal{L}[\ddot{y}(x)] = s^2\eta(s) - sY_1 - Y_2$$

$$\mathcal{L}[P(x)] = g(s)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} (a_{10}), & (S^2 + N_1 S + a_{11}), & (a_{12}), & (a_{13}), & 0, & \dots & 0 \\ (a_{20}), & (a_{21}), & (S^2 + N_2 S + a_{22}), & (a_{23}), & (a_{24}), & 0, & \dots & 0 \\ 0, & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0, & \dots & 0, & (a_{nm-2}), & (a_{nm-1}), & (S^2 + N_n S + a_{nn}), & (a_{nm+n}) \end{bmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

$$\{P\} = \begin{bmatrix} g_0(s) + Y_{01}(1 + N_0) + Y_{02} \\ g_1(s) + Y_{11}(1 + N_1) + Y_{12} \\ \vdots \\ g_n(s) + Y_{n1}(1 + N_n) + Y_{n2} \end{bmatrix} \quad \text{----- (4)}$$

$$\text{但し } N_r = C_r / M_r$$

$$Y_{11} = \dot{y}_1(x=0)$$

$$Y_{12} = \ddot{y}_1(x=0)$$

(3)の[A]を0とおいた行列式は特性方程式であり、一般には対角行列に変換することにより次のような2次因子の積の形で表わし得る。

$$(S^2 + \alpha_1 S + \beta_1)(S^2 + \alpha_2 S + \beta_2) \dots (S^2 + \alpha_r S + \beta_r) \dots (S^2 + \alpha_n S + \beta_n) = 0, \quad \text{----- (5)}$$

一方、外力の像関数 $g_r(s)$ は、一般に $g_n(s)/g_n(s) \dots (6)$ の形で表わされる。ここで(5)式及び

$g_n(s) = 0$ を満足する S はラプラス逆変換をする場合の特異点であることは言うまでもない。

(2), (3), (5), (6)より η_r は次の様に書ける。

$$\eta_r = \frac{g_r(s)}{g_n(s)} + \frac{A_{11}S + B_{11}}{S^2 + \alpha_1 S + \beta_1} + \frac{A_{12}S + B_{12}}{S^2 + \alpha_2 S + \beta_2} + \dots + \frac{A_{rn}S + B_{rn}}{S^2 + \alpha_n S + \beta_n} \quad \text{----- (7)}$$

ここで $g_r(s)$, $A_{1r} \sim A_{nr}$, $B_{1r} \sim B_{nr}$ は梁の曲げ剛性, 質量, ダンパー・キャパシター, 及び各復点の初期値(速度, 変位)により与えられる。(7)式右辺のオ1項は強制振動の像関数であり, オ2項よりオ $(n+1)$ 項迄は自由振動の像関数である。(注. 強制振動の一部については昭和42年度東北支部技術研究発表会に発表)

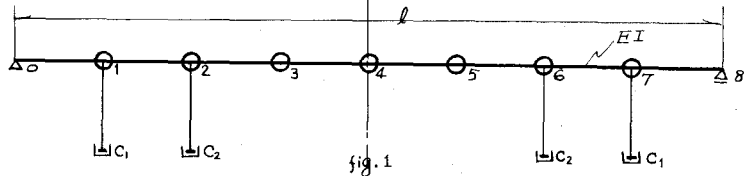
今, 梁が r 次の粘性減衰振動を行うとすれば, 即ち $\beta_r - \alpha r^2/4 > 0$ ならば固有振動数 ω_r 及び対数減衰率 δ_r は (7)より次のように求まる。

$$\omega_r = (\beta_r - \alpha r^2/4)^{1/2} \text{----- (8)}$$

$$\delta_r = \pi \alpha r / (\beta_r - \alpha r^2/4)^{1/2} \text{----- (9)}$$

又 $\beta_r - \alpha r^2/4 \leq 0$ ならば過減衰になる。

一例として, fig. 1 に示されるように単純梁を7復点系に置換して, スポットダンパーをつけた場合を考える。



梁の対称性より, 解を簡明にするために対称振動と逆対称振動に分けて考えると, 各々の $[A]$ は次のようになる。

$$[A]_{\text{対}} = \Phi_1 \begin{pmatrix} (p^2 + \varepsilon_1 p + 160), (-155), (72), (-18) \\ (-153), (p^2 + \varepsilon_2 p + 232), (-191), (72) \\ (72), (-191), (p^2 + 304), (-173) \\ (-36), (144), (-346), (p^2 + 232) \end{pmatrix}$$

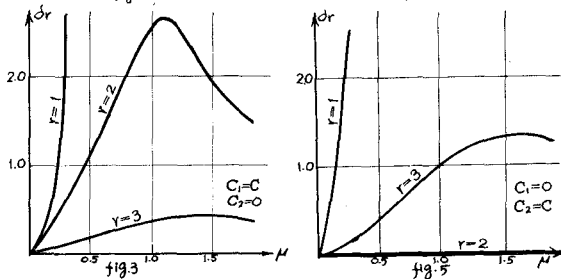
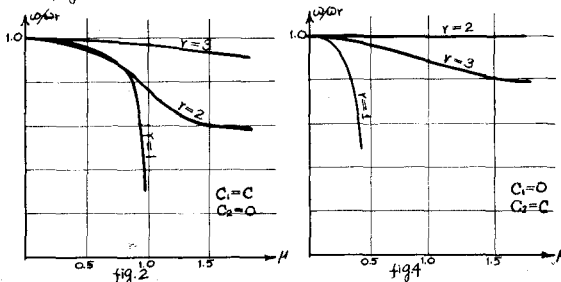
($p = s/\Phi_1$)

$$[A]_{\text{逆}} = \Phi_2 \begin{pmatrix} (p^2 + \varepsilon_1' p + 23), (-22), (9) \\ (-22), (p^2 + \varepsilon_2' p + 32), (-22) \\ (9), (-22), (p^2 + 23) \end{pmatrix}$$

($p = s/\Phi_2$)

$$\text{但し } \Phi_1 = 3072EI/97l^3M, \quad \Phi_2 = 3072EI/14l^3M, \quad \varepsilon_1 = N_1/\Phi_1, \quad \varepsilon_2 = N_2/\Phi_1, \quad \varepsilon_1' = N_1/\Phi_2, \quad \varepsilon_2' = N_2/\Phi_2$$

逆対称振動の場合, 粘性減衰振動数 ω_r と固有振動数 ω との比 ω_r/ω , 及び対数減衰率 δ_r を図示すれば fig. 2~5 のようになる。但し $\mu = C l \sqrt{g/EI \delta A}$ 。



ダンパー位置及びダンパー・キャパシターにより, 振動数, 減衰率にはかなりの変化を生じる。fig. 2~5 の場合は復点数が少ないため, 二次振動に関しては正確な値とは考えられない。しかし, かなり大きなキャパシターを有するダンパーをとりつけて制振作用を考えた場合, 二次以上の振動性状は, 一次振動の場合とはかなり異なる。本文は「ダンパーによる吊橋の制振」の基礎研究の一部であり, 文部省科学研究費の補助を受けたものである。