I－137　　軸力を考慮したラーメンの振動について

北海道開発局　土木試験所　　正員　伊藤昭夫

1. まえがき

連続梁やラーメンのような不静定構造物の振動問題を解くのに動力学的四連モーメント法がよく用いられる。ここでは部材方向に軸力が生じている場合、この軸力が固有振動数におよぼす影響を梁の振動の微分方程式を解くことにより考察した。

この結果をもとに載荷重のあるラーメン構造に適用し、その固有振動数を求め、同時に模型を用いて自由振動実験を行なった。この模型は模型1～3(写真)に示すように板鋼(厚さ8.8mm、幅38.3mmの帯鋼を25.4mmの平鋼に溶接)を加工したもので、おのおの境界条件が異なるものである。

2. 振動の微分方程式の解と動力学的四連モーメント式

一般に軸力と変位に比例する復元力を持つ梁の自由振動の微分方程式は次式で表わされる。

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+Ky=-\frac{A\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1}$$

ここに P は軸力、ω は固有振動数である。

(1)式の解を $y=Y\sin\omega t$ としてこれを代入すれば Y は次式となる。

$$Y=C_1\sin kx+C_2\cos kx+C_3\sinh\mu x+C_4\cosh\mu x \tag{2}$$

(2)式で

$$\begin{matrix}k\\ \mu\end{matrix}=\beta\left\{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4\beta^4}}\pm\frac{\alpha}{2\beta^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

ここに $\alpha=\dfrac{P}{EI}$、$\beta^4=\dfrac{A\gamma\omega^2}{EIg}-\dfrac{K}{EI}$ である。

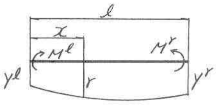


図1

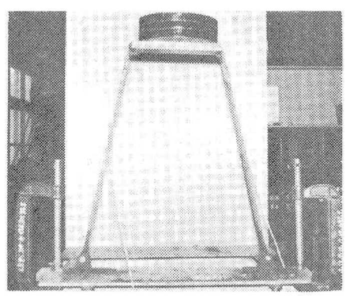
図1のように振動している部材のタワミ、曲げモーメントを定めれば(2)式の定数が求まる。一方四連モーメントの定理によれば

$$M_k^l l_k'+2M_k^r l_k'+2M_{k+1}^l l_{k+1}'+M_{k+1}^r l_{k+1}'-6EJ\left(\frac{Y_k^r-Y_k^l}{l_k}-\frac{Y_{k+1}^r-Y_{k+1}^l}{l_{k+1}}\right)=N_k+N_{k+1}', \tag{3}$$

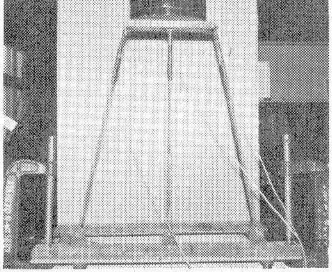
(3)式で N_k、N_{k+1}' は荷動項であり、振動する部材では、

$$\left.\begin{aligned}N_k&=-\frac{A_k\gamma l_k'\omega^2}{g}\int_0^l Y_k x_k\left(1-\frac{x_k^2}{l_k^2}\right)dx_k,\\ N_k'&=-\frac{A_k\gamma l_k'\omega^2}{g}\int_0^l Y_k(l_k-x)\left\{1-\frac{(l_k-x_k)^2}{l_k'^2}\right\}dx_k,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

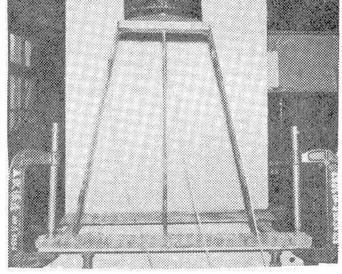
模型　1　$(EIY''_{x=0}=0)$



模型　2　$(EIY''_{x=0}=0)$



模型　3　$(EIY'_{x=0}=0)$



(2)式に図1の境界条件を入れて定数 C_1～C_4 を求め、この Y を(3)式に代入すると、次ぎの結果を得る。これで定数 C_1～C_4 は固有振動数 ω の関数であることがわかる。

$$
\left.
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right\}}\left\{\left(Y^r+\frac{M^r}{\mu^2EI}\right)\mathrm{cosec}\,\phi_2-\left(Y^l+\frac{M^l}{\mu^2EI}\right)\cot\phi_2\right\}, \quad C_2=\frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right\}}\left(Y^l+\frac{M^l}{\mu^2EI}\right), \\
C_3 &= -\frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right\}}\left[\left\{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2Y^l-\frac{M^l}{\mu^2EI}\right\}\coth\phi_1-\left\{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2Y^r-\frac{M^r}{\mu^2EI}\right\}\mathrm{cosech}\,\phi_1\right], \quad C_4=\frac{1}{\left\{1+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right\}}\left\{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2Y^l-\frac{M^l}{\mu^2EI}\right\},
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

(5)式で $\phi_1=\mu l$, $\phi_2=kl$ である。(5)式を(4)式に代入して整理すれば次式となる。

$$
\begin{matrix}-N_K\\-N_K'\end{matrix}=\frac{6EJ}{l}\left(f_{\substack{5\\6}}\,Y^l+f_{\substack{6\\5}}\,Y^r\right)+l'\left(f_{\substack{8\\7}}\,M^l+f_{\substack{7\\8}}\,M^r\right) \qquad (6)
$$

(6)式の $f_5\sim f_8$ は次式のように求められる。

$$
\left.
\begin{aligned}
f_5 &= \frac{\Phi}{\left\{1+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right\}}\left[\phi_1\left\{\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^3\mathrm{cosec}\,\phi_2+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\mathrm{cosech}\,\phi_1\right\}-\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\left\{1+\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^6\right\}\right]+\frac{\phi_0^4}{6\phi_1^2}(1+\varepsilon)\left\{1-\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^2\right\} \\
f_6 &= \frac{\Phi}{\left\{1+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right\}}\left[\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\left\{1+\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^6\right\}-\phi_1\left\{\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^3\cot\phi_2+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\coth\phi_1\right\}\right]+\frac{\phi_0^4}{3\phi_1^2}(1+\varepsilon)\left\{1-\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^2\right\} \\
f_7 &= \frac{6\Phi}{\phi_1\left\{1+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right\}}\left[\coth\phi_1-\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^3\cot\phi_2-\frac{1}{\phi_1}\left\{1-\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^4\right\}\right]-2 \qquad \text{ここに } \Phi=\left\{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4\beta^4}}+\frac{\alpha}{2\beta^2}\right\}^2 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \phi_0=\beta l \\
f_8 &= \frac{6\Phi}{\phi_1\left\{1+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right\}}\left[\left\{\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^3\mathrm{cosec}\,\phi_2-\mathrm{cosech}\,\phi_1\right\}+\frac{1}{\phi_1}\left\{1-\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^4\right\}\right]-1 \qquad \varepsilon=K/(EI\beta^4)\ \text{である}
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

3. 数値計算と模型実験

模型1～3について才1次固有振動数と載荷重との関係を求めた。(図2)

数値計算例として模型1(図3)について振動数方程式を求めると

$$\lambda_1(2+f_7)-\lambda_2(1-f_6)^2=0. \quad \text{ここで } \lambda_1, \lambda_2 \text{ は}$$

$$\lambda_1=\frac{1}{6}\left[\sin^2\theta(1-2\sin\theta\cdot\cos\theta)\left\{\frac{W\phi_0^4}{2A\gamma H}+f_4\right\}-\frac{We\phi_0^4}{2H(A\gamma H)}\right],$$

$$\lambda_2=\frac{H}{l}\left\{1+\frac{1+f_5}{1-f_6}\right\}\cos\theta+1,$$

今 $W=95.254^{kg}$, $e=13.6^{cm}$ とすれば繰返し計算により $\omega=3.075$ %s. 一方載荷による軸力を無視すると $\omega=3.284$ %s となる。

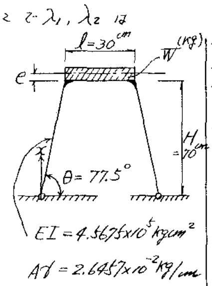


図3

なお f_4 は $f_4=\dfrac{\Phi}{\left\{1+\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right\}}\left[\phi_1\phi_2^2\left\{\coth\phi_1-\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^3\cot\phi_2\right\}-\phi_2^2\left\{1-\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^4\right\}\right]$

4. あとがき

ここでは軸力を考慮した動力学的四連モーメント式を誘導した。普通振動数の計算には軸力を無視するが比較的細い長柱を含む構造物では載荷重により固有振動数が低下すると同時に座屈荷重も低下する。このような場合には軸力による影響を考慮する必要がある。

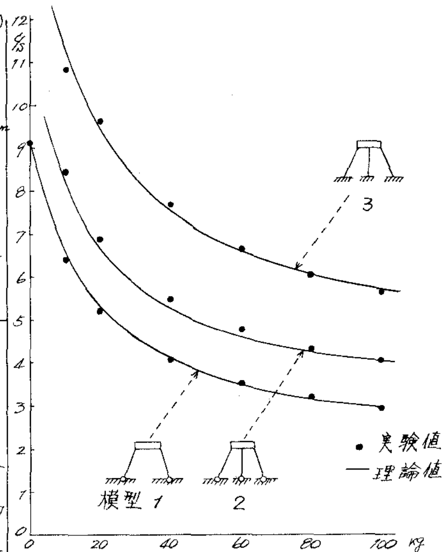


図2 固有振動数と載荷重との関係