

立体トラスげたの自由振動解析について

九州大学 正員 村上 正

山口大学 〇會 田 忠 義

1. まえがき

これまで、トラスげたの振動解析あまりには動的な問題について多くの研究がなされてきた。しかしそのほとんどは平面トラスを対象とするものであった。元来、トラスげたは立体的な構造であるから立体的なまで考察する方が厳密であり望しい。とくに、長大橋の一つである連続トラス橋などは立体トラスげたと考え、あきらかに方向の動的挙動を解明すべきであらう。本研究はこの問題に関する一提案である。立体トラスの自由振動解析に変形法を用いることができるが、振動数方程式が相当次数の行列式となり、これより固有値および固有ベクトルを求めることは多大な労力と計算時間を要する。しかし、平面トラスと同じくそれぞれに行列式の次数を低下させることができれば、この難关は解消できると考えた。そこで、本研究では真直ぐなトラスおよび対傾橋が半径方向に配置された曲リトラスに注目し、これを立体的に取り扱うと同時に、振動数方程式の次数を下げ固有値および固有ベクトルの算出を容易にすることを試みた。

トラス橋の対傾橋を含む横断面形の変化は上路式であるか下路式であるかにより異なり、これが振動に影響すると考えた。そのため、ここでは横断面形の変化を無視した場合とこれを考慮した場合についてその解法を示した。解析に当たって次の事項を留意した。

- a. トラス一般の仮定が成立する。 b. 立体トラスげたの便宜量は各節点に集中させる。 c. セン断中には横断面形変化の前後でその位置を变えたり。 d.

振動に対する減衰力は採用しない。

解析を容易にするため、真直ぐなトラスには直角座標を、曲リトラスには円筒座標を適用した。図-1a, bに横断面番号、節点番号のつけ方を示す。

2. 横断面形の変化を無視した場合

一つの横断面の未知量は、そのセン断中心の橋軸に直角な方向の水平変位 U_i 、同じく鉛直変位 W_i 、セン断中心を通り橋軸に平行な軸まわりの回転変位 Θ_i および四隅の節点の橋軸方向の接線変位 V_{4i+m} ($m=1, 2, 3, 4$) である。

これらの変位が i 番目の横断面に生ずると四隅の節点に起る変位は図-2を参照して決まる。

$$\bar{U}_{4i+m} = U_i + \Theta_i e_{v, 4i+m}, \quad \bar{V}_{4i+m} = V_{4i+m} \quad \dots (1)$$

$$\bar{W}_{4i+m} = W_i - \Theta_i e_{h, 4i+m}$$

$e_{v, 4i+m}, e_{h, 4i+m}$ は $\bar{v}_i$ の座標を直角座標で

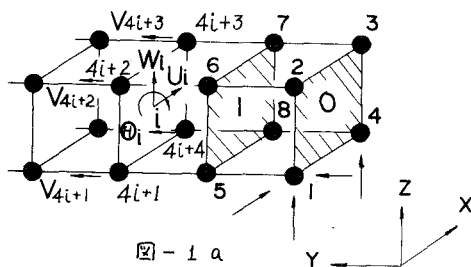


図-1 a

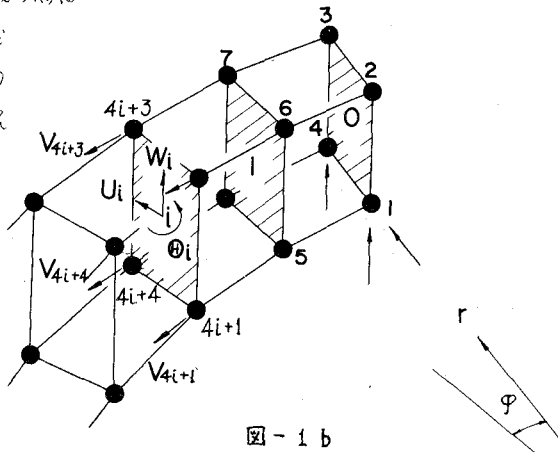


図-1 b

(x_{si}, y_{si}, z_{si}) , 19 間座標で (x_{si}, y_{si}, z_{si}) とすると

$$e_{i,4i+m} = z_{4i+m} - z_{si}, \quad e_{h,4i+m} = x_{4i+m} - x_{si} \quad \text{または} \quad x_{4i+m} - x_{si} \quad \dots \quad (2)$$

隣接する横断面 $(i-1)$, i および $(i+1)$ のそれぞれの中に任意の節長 $j = 4(i-1) + n$, $k = 4i + m$, $l = 4(i+1) + n$ ($m, n = 1, 2, 3, 4$) をとり, n と l とを, j, k を結び部材の k 本の部材番号を N_{kj} とすると,

$$N_{kj} = \frac{E A_{kj}}{l_{kj}} (-\bar{u}_j \lambda_{jk} - \bar{u}_n \lambda_{kj} - \bar{v}_j \mu_{jk} - \bar{v}_n \mu_{kj} - \bar{w}_j \nu_{jk} - \bar{w}_n \nu_{kj}) \dots \quad (3)$$

$=$ で, λ, μ, ν は次の通りである.

$$\text{直角座標} \dots \lambda_{kj} = (x_j - x_k) / l_{kj}, \quad \mu_{kj} = (y_j - y_k) / l_{kj}, \quad \nu_{kj} = (z_j - z_k) / l_{kj}$$

$$\text{19 間座標} \dots \lambda_{kj} = \{ \bar{r}_j \cos(\varphi_j - \varphi_k) - r_k \} / l_{kj}, \quad \mu_{kj} = \bar{r}_j \sin(\varphi_j - \varphi_k) / l_{kj}, \quad \nu_{kj} = (z_j - z_k) / l_{kj}$$

式(3)を U_i, W_i, Θ_i および V_k で表わし, $K_{kj} = E A_{kj} / l_{kj}$ とすると,

$$N_{kj} = K_{kj} \{ -U_i - \lambda_{jk} U_i - \lambda_{kj} W_i - \mu_{jk} V_k - \mu_{kj} W_k - \Theta_i (e_{nj} \lambda_{jk} - e_{kj} \nu_{jk}) - \Theta_k (e_{nk} \lambda_{kj} - e_{kn} \nu_{kj}) - \bar{v}_j \mu_{jk} - \bar{v}_k \mu_{kj} \} \dots \quad (4)$$

図-2 に示す振動変位を基準とした横断面 i の運動方程式は次のようにならされる.

$$m_i \frac{d^2 U_i}{dt^2} = \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 (N_{ne} \lambda_{ne} + N_{nj} \lambda_{nj}) \dots \quad (5)$$

$$m_i \frac{d^2 W_i}{dt^2} = \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 (N_{ne} \nu_{ne} + N_{nj} \nu_{nj}) \dots \quad (6)$$

$$I_i \frac{d^2 \Theta_i}{dt^2} = \sum_{n=1}^4 \left\{ e_{in} \sum_{m=1}^4 (N_{ne} \lambda_{ne} + N_{nj} \lambda_{nj}) - e_{kn} \sum_{m=1}^4 (N_{ne} \nu_{ne} + N_{nj} \nu_{nj}) \right\} \dots \quad (7)$$

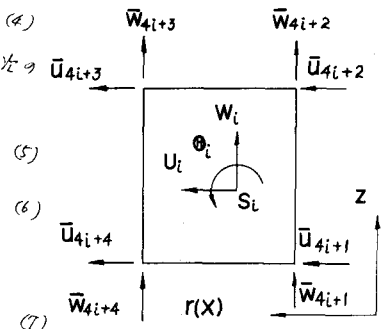


図-2

節長 k の橋軸方向, すなわち橋線方向の運動方程式は

$$m_k \frac{d^2 V_k}{dt^2} = \sum_{n=1}^4 (N_{ne} \mu_{ne} + N_{nj} \mu_{nj}) \dots \quad (8)$$

$=$ で, m_i は横断面 i の質量, I_i は質量慣性モーメント, m_k は節長 k の質量である.

以上の運動方程式に式(4)を代入し, すると,

$$U_i = u_i e^{i\omega t}, \quad W_i = w_i e^{i\omega t}, \quad \Theta_i = \theta_i e^{i\omega t}, \quad V_k = v_k e^{i\omega t}$$

(指数中の ω は同振動数 $\omega = \sqrt{\lambda}$) を代入する = により, 運動方程式を u_i, w_i, θ_i, v_k で表わすことができる. この運動方程式をトラスの各横断面に適用する = により一連の運動方程式が得られ, 結局振動数方程式が求められる.

3. 横断面形の変化を考慮した場合

この場合, 前記の仮定に加えて, 以下の仮定を入れる.

a. 横断面はその面内に作用する外力に対して箱形ラーメンとして抵抗するが面外荷重に対しては何ら抵抗しない. b. 横断面を構成する部材中, 横たわみは水平対橋軸部材の曲げ剛性は一般に垂直たわみのそれより大きい. そのため横断面形の変化は垂直たわみの曲げ変形に起因する. c. 横断面の

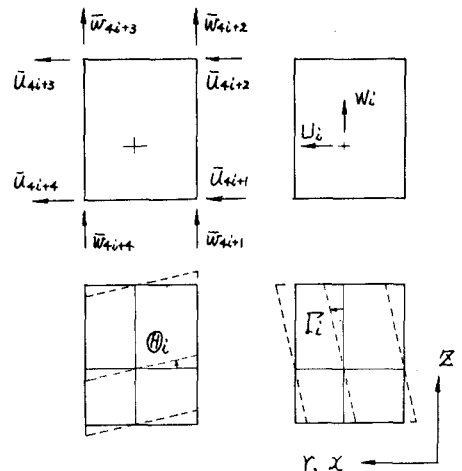


図-3

変位および変形は次の変形量の合成である(図-3)。

① セン断中心の水平および鉛直変位(U_i, W_i)。② 横断面形の鉛直セン断変形(Θ_i)。③ 横断面形の水平セン断変形(Γ_i)。

結局、一横断面の未知量は上記 $U_i, W_i, \Theta_i, \Gamma_i$ の他に横断面の四隅の節点の橋軸方向の接線変位 V_k である。以上の変位が横断面に生ずると、節点変位は図-3を参照して次式となる。

$$\bar{U}_k = U_i + \Gamma_i e_{uk}, \quad \bar{V}_k = V_k, \quad \bar{W}_k = W_i - \Theta_i e_{wk} \dots \quad (9)$$

この節点応力は次のようになる。

$$N_{kj} = K_{kj} (-U_i \lambda_{jk} - U_i \lambda_{kj}' - W_i V_{jk} - W_i V_{kj}' + \Theta_i e_{uj} V_{jk} + \Theta_i e_{uk} V_{kj}' - \Gamma_i e_{uj} \lambda_{jk} - \Gamma_i e_{wk} \lambda_{kj}' - V_j \mu_{jk} - V_k \mu_{kj}') \dots \quad (10)$$

横断面および節点の運動方程式は図-4を参照して、次式になる。

$$m_i \frac{d^2 U_i}{dt^2} = \sum_{m=1}^4 \sum_{j=1}^4 (N_{me} \lambda_{ie} + N_{mj} \lambda_{ej}') \dots \quad (11)$$

$$m_i \frac{d^2 W_i}{dt^2} = \sum_{m=1}^4 \sum_{j=1}^4 (N_{me} V_{ie} + N_{mj} V_{ej}') \dots \quad (12)$$

$$I_i \frac{d^2 \Theta_i}{dt^2} = - \sum_{m=1}^4 e_{um} \sum_{j=1}^4 (N_{me} \lambda_{ie} + N_{mj} \lambda_{ej}') - \sum \bar{M} \dots \quad (13)$$

$$I_i \frac{d^2 \Gamma_i}{dt^2} = \sum_{m=1}^4 e_{um} \sum_{j=1}^4 (N_{me} \lambda_{ie} + N_{mj} \lambda_{ej}') - \sum h_o \bar{Q} \dots \quad (14)$$

$$m_k \frac{d^2 V_k}{dt^2} = \sum_{j=1}^4 (N_{kj} \mu_{ke} + N_{jk} \mu_{ej}') \dots \quad (15)$$

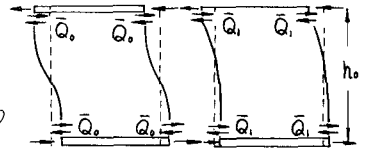
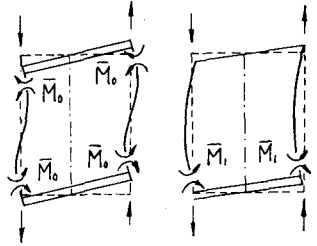


図-4

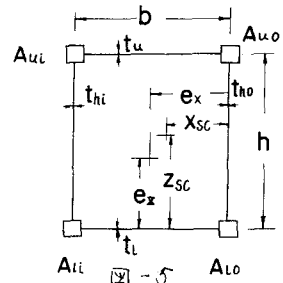


図-5

前項2と同様、上記の運動方程式に式(10)を代入し、さらに、次の周期関数 $U_i = u_i e^{i\omega t}$, $W_i = w_i e^{i\omega t}$, $\Theta_i = \theta_i e^{i\omega t}$, $\Gamma_i = \gamma_i e^{i\omega t}$, $V_k = v_k e^{i\omega t}$ で変位を表わし、これらの運動方程式をトラスの各構面に適用すると、一連の運動方程式が得られる。結局、これより振動数方程式が求められる。

4. 横断面のセン断中心の位置

横断面のセン断中心位置は、注目する横断面を上下両パネルのセン断中心の平均の位置であると仮定する。一パネルのセン断中心の位置はそのパネルの各構面をセン断変形の等しい板に置換し、Four Flange Box Beamの一部であると考え、セン断流理論より算出する。図-5を参照すると、一パネルのセン断中心の位置は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} x_{sc} &= \bar{x}_{sc} - \frac{2bh}{K\phi} \left\{ \frac{A_{ui}}{t_{ui}A_u} \left(1 - \frac{s}{A_u A_o}\right) - \frac{A_{uo}}{t_{uo}A_u} \left(1 - \frac{s}{A_u A_o}\right) \right\}, \\ z_{sc} &= \bar{z}_{sc} - \frac{2bh}{K\phi} \left[\frac{1}{t_l} + \frac{h}{Kb} \left\{ \frac{A_{ui}}{t_{ui}A_i} \left(1 - \frac{s}{A_o A_u}\right) + \frac{A_{uo}}{t_{uo}A_o} \left(1 + \frac{s}{A_i A_u}\right) \right\} \right] \\ &= z, \quad \bar{x}_{sc} = 2e_x - b + \frac{bA_{uo}}{KA_u} \left(1 + \frac{s}{A_o A_u}\right), \quad \bar{z}_{sc} = -\frac{hA_{ui}}{KA_i} \left(1 - \frac{s}{A_u A_o}\right), \quad K = 1 - \frac{s^2}{A_u A_i A_o A_o} \\ s &= A_u A_o - A_u A_i, \quad \phi = b \left(\frac{1}{t_{ui}} + \frac{1}{t_l} \right) + h \left(\frac{1}{t_{ui}} + \frac{1}{t_{uo}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

5. 曲リトラスへの適用例

次に本橋元をもつ曲リトラス(図-6)に本解析法を適用した結果を示す。

主トラス間隔: 7.0m, 主トラス高土: 10.0m, パネル数: 8, 内側主トラス半径: 96.5m,

外側主トラス半径: 103.5m, -1パネルをばさる中心角: $4^{\circ}48'57''$, 全中心角: $39^{\circ}30'51''$, 橋長(橋軸にそって): 67.2m.

横断面形変化無視の場合			横断面形変化考慮の場合		
次数	振動数	卓越変位	次数	振動数	卓越変位
1	1.009	U_i, V_R	1	0.786	W_i, Θ_i, I_i
2	1.732	W_i, Θ_i	2	0.985	U_i, V_R
3	2.504	V_R, U_i	3	2.355	I_i, U_i
4	3.638	U_i, V_R	4	2.906	I_i, U_i
5	3.693	Θ_i, W_i	5	3.157	Θ_i, W_i

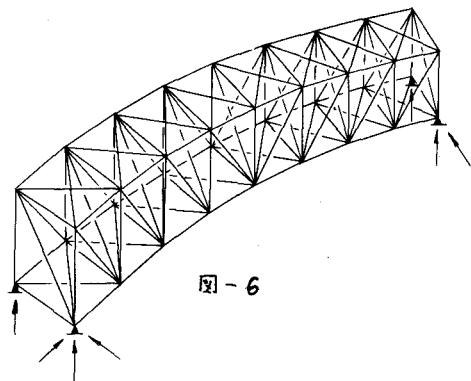


図-6

横断面形変化を無視すると、一次振動で水平変位が一次振動で鉛直変位と回転変位が卓越した。横断面形変化を考慮すると、一次振動で鉛直変位と水平および鉛直せん断変位が、二次振動で水平変位が卓越した。横断面形変化を考慮すると、振動数が低くなる。

6. 真直ぐなトラスへの適用例

次に示す諸元をもつ真直ぐなトラス(図-7)に適用した結果を示す。

主トラス間隔: 8.4m, 主トラス高さ: 6.5m

パネル長: 5.1m, 橋長: 40.8m.

横断面形変化の無視あるいは考慮いづれの場合も橋軸に直角な水平変位が主たるはこれと同時に回転変位あるいは水平せん断変位が卓越する振動型が一次となり、二次振動で鉛直変位が卓越した。図-7のような実橋と同じ支承条件では、卓越する変位とそうであるものが明白である。このため、次のように近似計算する事も可能である。

(横断面形変化無視の場合)……①鉛直および接線変位が卓越する振動型を求める場合、水平変位およびせん断中心まわりの回転変位を無視する(平面トラスと同じ)。②水平変位および回転変位が卓越する振動型を求める場合、これ以外の変位を無視する。(横断面形変化考慮の場合)……①鉛直および接線変位が卓越する振動型を求める場合、これ以外の変位を無視する。②水平変位、鉛直および水平せん断変位が卓越する振動型を求める場合、鉛直変位を無視する。

このトラス橋を平面トラスとして、一次振動数を Rayleigh 法により求めると、3.560 /sec となり、上記の結果の二次振動(W_i, V_R が卓越)がこれに相当し、よく一致した。

7. 結ぶ

以上、曲リトラス橋および真直ぐなトラス橋の主体的な自由振動解析法を述べ、その適用例を示すと同時に、曲リトラスおよび真直ぐなトラス橋の動的性状を示した。

横断面形変化無視の場合			横断面形変化考慮の場合		
次数	振動数	卓越変位	次数	振動数	卓越変位
1	3.382	U_i, Θ_i	1	0.683	I_i, U_i
2	3.568	W_i, V_R	2	3.548	W_i, V_R
3	5.945	Θ_i, U_i	3	3.966	I_i, U_i, Θ_i
4	6.786	V_R, W_i	4	6.726	I_i, U_i, Θ_i
5	6.810	U_i, Θ_i	5	6.625	Θ_i, U_i, I_i