

矩形ラーメンの動的弾塑性解析

九州大学工学部 正員 山崎徳也

九州大学工学部 正員 黒木健実

1. 序言

はりをもととみなしうるラーメンが水平荷重を受ける場合の動的解析は、通常これを多質点系に置換して行なわれる。その際塑性まで考慮すると、弾性と塑性を判別する必要が生じ、ラーメンの動的解析はかなり煩雑となる。

本研究は、かかる煩雑さを排除すべく、柱の復元力特性を双一次型と仮定し、その幾何学的関係に着目して簡単な弾性塑性の判別式を導き、矩形ラーメンの応答解析の簡易化を図ったものである。

2. 弾性時の基本式

解析を容易にするために、ラーメンを各部材が剛棒で構成され、かつ柱頭・柱脚にははりの水平移動を可能ならしめるばねを有するモデルへ変換すると、弾性時のばね定数 K が変換前の柱と変換後の柱との歪エネルギーを等置することにより次のようにえられる。

$$K = \frac{6EI}{h} \quad \text{ただし } EI: \text{柱の曲げ剛性, } h: \text{柱の高さ} \quad (1)$$

いま、塑性時のばね定数を γK とおけば、ばねの双一次型復元力特性が図-1 のようにえられる。こゝに $AD \parallel BC \parallel EF$, $FB \parallel EC \parallel R'$ 軸で、矢印は M - R 関係の進行方向を示す。

次に図-1 を用いて、ばねが弾性状態にある場合、すなわち M - R 関係が AD , BC , EF 上にある場合の基本式を求めることとする。

(1) 判別式、曲げモーメントおよび塑性部材角

まず、任意時刻 t における M - R 関係が図-2 に示すように AD 上にある場合を考えると、幾何学的関係より

$$GQ' < AA' \quad (2)$$

が成立する。よってこの式を部材角で表わすことにより判別式

$$|KR(t)(1-\gamma)| < M_p(1-\gamma) \quad (3)$$

がえられ、これに対応するばねの曲げモーメントが次式で与えられることとなる。

$$M(t) = KR(t) = KR^e(t) \quad (4)$$

ただし $R^e(t)$: 弾性部材角

次に M - R 関係が図-3 に示すように BC 上にある場合を考えると、この場合も式(2)が成立するが、その内容は式(3)とは異なり次式となる。

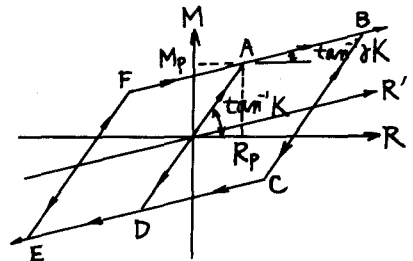


図-1

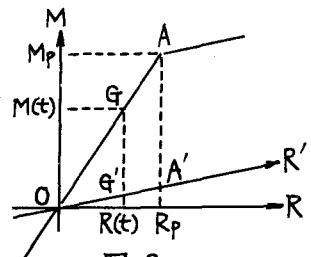


図-2

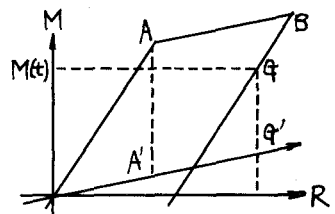


図-3

$$|KR^e(t) - rKR(t)| < M_p(1-r) \quad (5)$$

ここで部材角 $R(t)$ を式(6)のように弾性部材角 $R^e(t)$ と塑性部材角 $R^p(t)$ とに分ける。

$$R(t) = R^e(t) + R^p(t) \quad (6)$$

さらに塑性部材角が

$$R^p(t) = R^p(t-k) \quad \text{ただし } k: \text{微小時間间隔} \quad (7)$$

で表わされることを考慮すると、式(5)は次のようになる。

$$|KR(t)(1-r) - KR^p(t-k)| < M_p(1-r) \quad (8)$$

式(8)が成立するとき、曲げモーメント $M(t) = KR^e(t)$ は式(6), (7) より

$$M(t) = K[R(t) - R^p(t-k)] \quad (9)$$

で与えられる。

式(8), (9)に塑性部材角 $R^p(t-k) = 0$ を代入すると、式(3), (4) がそれぞれええられ、AD上のM-R関係がBC上のM-R関係に包含されることとなる。さらにM-R関係がEF上にある場合も、BC上にある場合と同じく式(7), (8), (9)がええられる。

よって式(8)が成立するとき、ばねは弾性状態にあることが判別され、曲げモーメントは式(9)で、塑性部材角は式(7)でそれぞれ表わされることとなる。

(2) 水平変位

次に式(8)の判別式および式(9)の曲げモーメントの演算に必要なはりの水平変位をLagrangeの方程式より求めることとする。

i 層に集中する重量を W_i 、 i 層の地盤に対する相対速度を $\dot{x}_i$ 、地盤速度を $\dot{x}_0$ とおくと、 m 層の等価ラメンの運動エネルギー T およびポテンシャルエネルギー U がそれぞれ

$$T = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \cdot \frac{W_i}{g} (\dot{x}_i + \dot{x}_0)^2, \quad U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j M_i^2}{j K_i}$$

と表わされるゆえ、この T 、 U をLagrangeの方程式に適用すると次の運動方程式がえられる。

$$\frac{W_i}{g} (\ddot{x}_i + \ddot{x}_0) + \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{2j M_i}{h_i} - \frac{2j M_{i+1}}{h_{i+1}} \right] = Q_i \quad (10)$$

よって

$$\ddot{x}_i(t) = \frac{x_i(t-k) - 2x_i(t) + x_i(t+k)}{k^2}$$

を式(10)に代入し、 $x_i(t+k)$ について整理すると、所要の水平変位算定式が次のように求められる。

$$x_i(t+k) = -\frac{gk^2}{W_i} \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{2j M_i(t)}{h_i} - \frac{2j M_{i+1}(t)}{h_{i+1}} - Q_i(t) \right] + 2x_i(t) - x_i(t-k) - k^2 \ddot{x}_0(t) \quad (11)$$

ただし M_i : i 層目層目の柱の曲げモーメント

3. 塑性時の基本式

(1) 判別式、曲げモーメントおよび塑性部材角

ばねが弾性状態から塑性状態へ移行すると、ばね定数は K から δK に変わり、ばねのM-R関係はFB上では F から B 方向へ、CF上では C から E 方向へのみ移動する。

よって時刻 t におけるM-R関係がFB上の点にあると仮定すると、1step前の時刻 $t-k$ における

M-R関係は G_2 点上にあるいは図-4に示すように G_2 点の左側(負)にくる。

このとき判別式として

$$G_2 G_2' \leq H G_2' \quad (12)$$

すなわち

$$M_p(1-\gamma) \leq KR(t)(1-\gamma) - KR^p(t-k) \quad (13)$$

かえられ、曲げモーメントは

$$M(t) = M_p(1-\gamma) + \gamma KR(t) \quad (14)$$

で表わされることとなる。

一方、時刻 $t-k$ から t までの微小時間 k に増加した塑性部材角は

図-4を参照すると

$$\Delta R^p(t-k) = \frac{1-\gamma}{\gamma K} [M(t) - M(t-k)] \quad (15)$$

で与えられるゆえ、時刻 t における塑性部材角は

$$R^p(t) = R^p(t-k) + \Delta R^p(t-k) \quad (16)$$

で求められることとなる。

次にM-R関係がBCを経てCE上の G_2 点にあると仮定すると、1 step 前の時刻 $t-k$ におけるM-R関係は G_2 点上にあるいは図-5に示すように G_2 点の右側(負)にくる。このとき式(12)が成立するが、その内容は式(13)とは異なる。

$$KR(t)(1-\gamma) - KR^p(t-k) \leq -M_p(1-\gamma) \quad (17)$$

で表わされ、式(17)に対応する曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M(t) = -M_p(1-\gamma) + \gamma KR(t) \quad (18)$$

一方、塑性部材角の増加量および塑性部材角は、M-R関係がFB上にある場合と同様に、それぞれ式(15)、(16)で算定されることとなる。

(2) 水平変位

弾性状態から塑性状態へ移行したばねは運動中の系のエネルギーを塑性仕事に消耗し、系に対して部材角に比例する減衰作用を及ぼすゆえ、塑性時の運動方程式の誘導に当たり曲げモーメントを外力とみなしうることとなる。

いま、 i 層を着目の柱のみが塑性状態にあると仮定すると、次の運動方程式がえられる。

$$\frac{W_i}{g}(\ddot{x}_i + \ddot{x}_0) + \sum_{j \neq i} \frac{2gM_{ij}}{h_{ij}} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{2gM_{ij}}{h_{ij}} = Q_i - \frac{2gM_i}{h_i}$$

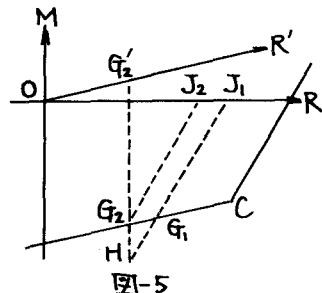
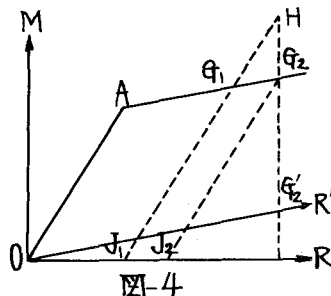
この式は式(10)の弾性時の運動方程式と合致する。したがって塑性時の水平変位は弾性時と同様に式(11)で算定されることとなる。

4. 基本式の要約

ここに基本式を要約すると、表-1のように弾性時、塑性時および両方に共通な式に分類され、時刻 t 以前の状態が判明しているとき式(23)より次の時刻 $t+k$ における水平変位が求められることとなる。

したがって荷重および初期条件が与えられると、式(10)の運動方程式より $\ddot{x}_i(0)$ が、次いで

$$x_i(k) = x_i(0) + k\dot{x}_i(0) + 0.5k^2\ddot{x}_i(0)$$



が求められ、それ以後は表-1の式(24),(25),(19),(20),(21),(22),(23)の繰返し演算により、逐次曲げモーメント、塑性部材角および水平変位が算出されることになる。

表-1

	弾性時	塑性時	式番
判別式	$ {}_j\bar{M}_i(t) < {}_jM_{ip}(1-\gamma)$	${}_j\bar{M}_i(t) \geq {}_jM_{ip}(1-\gamma)$	19
曲げモーメント	${}_jM_i(t) = {}_j\bar{M}_i(t)$	${}_jM_i(t) = {}_jM_{ip}(1-\gamma) + {}_jK_i R_i(t)$	20
塑性部材角の増加量	$\Delta {}_jR_i^p(t-k) = 0$	$\Delta {}_jR_i^p(t-k) = \frac{1-\gamma}{{}_jK_i} [{}_j\bar{M}_i(t) - {}_j\bar{M}_i(t-k)]$	21
弾性時・塑性時共通			
塑性部材角	${}_jR_i^p(t) = {}_jR_i^p(t-k) + \Delta {}_jR_i^p(t-k)$		22
水平変位	$X_i(t+k) = -\frac{gk^2}{W_i} \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{{}_2{}_j\bar{M}_i(t)}{h_i} - \frac{{}_2{}_j\bar{M}_{0i}(t)}{h_{0i}} - Q_i(t) \right] + 2X_i(t) - X_i(t-k) - k^2 \ddot{X}_i(t)$		23
部材角	$R_i(t) = \frac{X_i(t) - X_{i-1}(t)}{h_i}$		24
${}_j\bar{M}_i(t)$	${}_j\bar{M}_i(t) = {}_jK_i R_i(t)(1-\gamma) - {}_jK_i {}_jR_i^p(t-k)$		25

5. 計算例

図-6に示すラーメンに図-7の動的荷重を作用させ、次の諸値を用いて計算を行なった。

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, I = 1.07 \times 10^8 \text{ cm}^4, h = 400 \text{ cm}$$

$$W = 1140.8 \text{ kg} \text{ (はりに集中する重量)}$$

$$P_0: \text{静的降伏荷重}, \gamma = 0.8, \tau = 1.0 \text{ sec}$$

結果の一部を図-8に示す。これよりラーメンは、同じ荷重を受ける場合においても、塑性時の柱の曲げ剛性によって動的挙動を異にし、塑性時の曲げ剛性の増大に伴い、水平変位および塑性変形量は減少するが、水平変位の振幅は逆に増大することとが認められる。

6. 結語

本研究は水平荷重を受けるせん断形ラーメンを対象とし、復元力特性を双一次型と仮定して動的解析の簡易化を図ったもので、その特色は弾性時塑性時の判別がわずかの個式で完了し、これらを含む基本式が表-1に示すごく簡明で、そのプログラミングも容易に行なうことができる。

なお、本法ではラーメンのモデル化の際、柱の重量を柱頭柱脚に2分しているゆえ、その適用は柱の重量がはりの重量に比べて十分小さいかあるいは高次の振動モードを無視する場合に限定される。

