

デジタルコンピューターとアナログコンピューターによる多自由度系構造物の地震応答解析法について

北 大 正 員 工 博 渡 辺 昇
 日立造船 正 員 工 修 多 田 和夫
 北大 院 学 生 員 〇 川 口 雄 常
 北 大 正 員 金 子 考 吉

1. 要旨

多自由度系構造物の地震応答解析法について、まずデジタルコンピューターでは Duhamel 積分を応用発展させ、応答変位、応答速度、応答加速度を求めるプログラムを完成し、次いで、アナログコンピューターで解析するためのブロック図を完成し、両者の解析法について検討した。

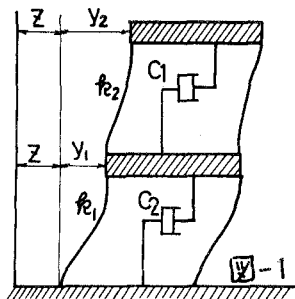
2. 理論の概要

2-1 デジタルコンピューターによる地震応答解析法について

今、図-1の様は2自由度系構造物について考える。質量 m_1, m_2 , 減衰係数 C_1, C_2 , バネ定数 k_1, k_2 とし各質点の地盤との相対変位 y_1, y_2 , 地震時の地動変位 z , $C_{11} = C_1 + C_2$, $C_{12} = -C_2$, $C_{21} = -C_2$, $C_{22} = C_2$, $k_{11} = k_1 + k_2$, $k_{12} = -k_2$, $k_{21} = -k_2$, $k_{22} = k_2$ とすると,

振動の微分方程式は,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (1)$$



今基準座標 ξ を用い、固有ベクトルを $[X_{ij}]$ とすれば,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$[X_{ij}]$ の転置マトリックス $[X_{ij}^T]$ を左から乗すると固有ベクトルの直交性から(2)式は次の様になる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 X_{11} & m_2 X_{21} \\ m_1 X_{12} & m_2 X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\therefore \left(\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 m_r X_{r1}^2 &= M_1, \quad \sum_{r=1}^2 m_r X_{r2}^2 = M_2, \quad \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 C_{rs} X_{r1} X_{s1} = C_1, \quad \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 C_{rs} X_{r2} X_{s2} = C_2 \\ \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 k_{rs} X_{r1} X_{s1} &= K_1, \quad \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 k_{rs} X_{r2} X_{s2} = K_2 \end{aligned} \right) \quad (4)$$

今、固有値を ω_1, ω_2 とすれば, $\frac{K_1}{M_1} = \omega_1^2$, $\frac{K_2}{M_2} = \omega_2^2$, $\frac{C_1}{2M_1\omega_1} = \beta_1$, $\frac{C_2}{2M_2\omega_2} = \beta_2$ (減衰定数という)。

$$\text{又 } \frac{m_1 X_{11} + m_2 X_{21}}{m_1 X_{11}^2 + m_2 X_{21}^2} = \beta_1, \quad \frac{m_1 X_{12} + m_2 X_{22}}{m_1 X_{12}^2 + m_2 X_{22}^2} = \beta_2 \text{ とおくと (3) 式は,}$$

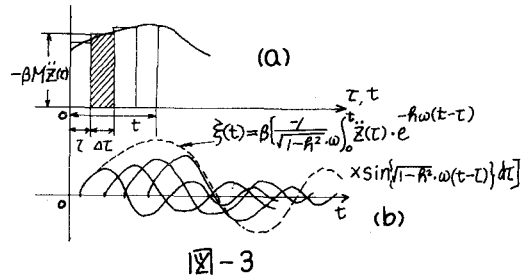
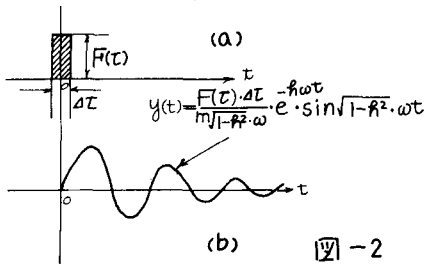
$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + 2\beta_1\omega_1\dot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 &= -\beta_1\ddot{z} \\ \ddot{\xi}_2 + 2\beta_2\omega_2\dot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 &= -\beta_2\ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

したがって(1)式の2自由度系の連立微分方程式は、(2)式の基準座標 ξ を媒介として、(5)式の一自由度系の微分方程式に分離された。(5)式はそれぞれ独立に解くことが出来、応答変位 ξ , 応答速度 $\dot{\xi}$, 応答加速度 $\ddot{\xi}$ はそれぞれ次の様になる。

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1(t) &= \beta_1 \dot{\xi}_{10} = \beta_1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \cdot e^{-h_1 \omega_1 (t-\tau)} \cdot \sin\{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 (t-\tau)\} d\tau \right] \\
 \dot{\xi}_2(t) &= \beta_2 \dot{\xi}_{20} = \beta_2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \cdot e^{-h_2 \omega_2 (t-\tau)} \cdot \sin\{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 (t-\tau)\} d\tau \right] \\
 \ddot{\xi}_1(t) &= \beta_1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \left(-h_1 \omega_1 \cdot e^{-h_1 \omega_1 (t-\tau)} \cdot \sin\{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 (t-\tau)\} + e^{-h_1 \omega_1 (t-\tau)} \cdot \sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 \cdot \cos\{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 (t-\tau)\} \right) d\tau \right] \\
 \ddot{\xi}_2(t) &= \beta_2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \left(-h_2 \omega_2 \cdot e^{-h_2 \omega_2 (t-\tau)} \cdot \sin\{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 (t-\tau)\} + e^{-h_2 \omega_2 (t-\tau)} \cdot \sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 \cdot \cos\{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 (t-\tau)\} \right) d\tau \right] \\
 \ddot{\xi}_1(t) &= \beta_1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \left\{ (h_1 \omega_1)^2 \cdot e^{-h_1 \omega_1 (t-\tau)} \cdot \sin\{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 (t-\tau)\} - h_1 \omega_1 \cdot e^{-h_1 \omega_1 (t-\tau)} \cdot \sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 \cdot \cos\{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 (t-\tau)\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - h_1 \omega_1 \cdot e^{-h_1 \omega_1 (t-\tau)} \cdot \sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 \cdot \cos\{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 (t-\tau)\} + e^{-h_1 \omega_1 (t-\tau)} \cdot (\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1)^2 \cdot \sin\{\sqrt{1-h_1^2} \cdot \omega_1 (t-\tau)\} \right\} d\tau \right] \\
 \ddot{\xi}_2(t) &= \beta_2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \left\{ (h_2 \omega_2)^2 \cdot e^{-h_2 \omega_2 (t-\tau)} \cdot \sin\{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 (t-\tau)\} - h_2 \omega_2 \cdot e^{-h_2 \omega_2 (t-\tau)} \cdot \sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 \cdot \cos\{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 (t-\tau)\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - h_2 \omega_2 \cdot e^{-h_2 \omega_2 (t-\tau)} \cdot \sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 \cdot \cos\{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 (t-\tau)\} + e^{-h_2 \omega_2 (t-\tau)} \cdot (\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2)^2 \cdot \sin\{\sqrt{1-h_2^2} \cdot \omega_2 (t-\tau)\} \right\} d\tau \right]
 \end{aligned}$$

----- (6)

2-2 プログラミングについて



一自由度系に外力 $F(t)$ が作用するときの振動の微分方程式は、

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t) \quad \text{----- (7)}$$

である。これに、図-2-(a)の様に Δt の間に外力 $F(t)$ を突然与えたとすれば、これによる応答変位 $y(t)$ は、図-2-(b)の様に次式で表わされる。

$$y(t) = \frac{F(t) \cdot \Delta t}{m \sqrt{1-h^2} \cdot \omega} \cdot e^{-h\omega t} \cdot \sin\{\sqrt{1-h^2} \cdot \omega t\}, \text{ 但し } \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, h = \frac{c}{2m\omega} \right) \quad \text{----- (8)}$$

そこで、次は、図-3-(a)の様に連続した外力曲線が式(5)の右辺に入る場合には、これを Δt 時間毎のインパルス $-\beta M \ddot{z}(\tau) \Delta t$ に分けて、ステップ毎に叩き込んでやると、各インパルスはそれぞれ、図-3-(b)の実線の様な応答変位曲線が、 Δt 時間づつおきながら発生する。ところが式(5)は線型微分方程式であるから、図-3-(b)の各実線の縦距は互に加算することができる。これらを加えると結局、図-3-(b)の破線の様な応答変位曲線が求まる。これは次式で表わされ式(6)の $\xi(t)$ に相当する。

$$\xi(t) = \beta \left[\frac{1}{\sqrt{1-h^2} \cdot \omega} \int_0^t \ddot{z}(\tau) \cdot e^{-h\omega(t-\tau)} \cdot \sin\{\sqrt{1-h^2} \cdot \omega(t-\tau)\} d\tau \right] \quad \text{----- (9)}$$

応答速度 $\dot{\xi}(t)$ 、応答加速度 $\ddot{\xi}(t)$ も同様に求めて求まり、結局、式(2)を用いて、 $y(t)$ 、 $\dot{y}(t)$ 、 $\ddot{y}(t)$ が得られる。簡単はプログラミングフローチャートを、図-4に示す。

2-3. アナログコンピューターによる 地震応答解析法について

アナログコンピューターでは、微分積分の演算を同時に並列的に解くことができるので微分方程式等をそのままの形で(数学的解法を知らなくとも)容易に解くことが出来、プログラミングも極めて簡単であるという持長がある。反面、数式が複雑化した場合、電圧のアムバランスによる誤差等、多少の欠点があるが、構造物の動的解析に於る最も有効な手段と考えられる。ここでは、ブロック図作成に於て考えられる3種の方法を述べる。

(i) ブロック図 A 型

図-1の様な2自由度系構造物について、考えると連立微分方程式は、(1)式より

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\frac{r_{11}}{m_1} y_1 - \frac{r_{12}}{m_1} y_2 - \frac{c_{11}}{m_1} \dot{y}_1 - \frac{c_{12}}{m_1} \dot{y}_2 - \ddot{z} \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{r_{21}}{m_2} y_1 - \frac{r_{22}}{m_2} y_2 - \frac{c_{21}}{m_2} \dot{y}_1 - \frac{c_{22}}{m_2} \dot{y}_2 - \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

これをブロック図で表わすと図-5のようになる。

(ii) ブロック図 B 型

式(10)は又、次の様に変形される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\frac{m_2 \alpha_{12}}{m_1 \alpha_{11}} \ddot{y}_2 - \frac{1}{m \alpha_{11}} y_1 - \frac{\alpha_{11} c_{11} + \alpha_{12} c_{21}}{m_1 \alpha_{11}} \dot{y}_1 \\ &\quad - \frac{\alpha_{11} c_{12} + \alpha_{12} c_{22}}{m \alpha_{11}} \dot{y}_2 - \frac{m_1 \alpha_{11} + m_2 \alpha_{12}}{m_1 \alpha_{11}} \ddot{z} \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{m_1 \alpha_{21}}{m_2 \alpha_{22}} \ddot{y}_1 - \frac{1}{m_2 \alpha_{22}} y_2 - \frac{\alpha_{21} c_{11} + \alpha_{22} c_{21}}{m_2 \alpha_{22}} \dot{y}_1 \\ &\quad - \frac{\alpha_{21} c_{12} + \alpha_{22} c_{22}}{m_2 \alpha_{22}} \dot{y}_2 - \frac{m \alpha_{21} + m_2 \alpha_{22}}{m_2 \alpha_{22}} \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

但し $[\alpha]^{-1} = [r]$ である。

このブロック図は、図-6に示す。

(iii) ブロック図 C 型

式(1)を基準座標を用いて、式(3)に変形して、デジタルコンピューターで解く方法をアナログコンピューターに転用する。この方法では、あらかじめデジタルコンピューターで固有値 ω_i 、固有ベクトル X_{ij} を計算して、式(5)の係数を全部計算してから、ブロック図を完成する。

デジタルコンピューターフローチャート

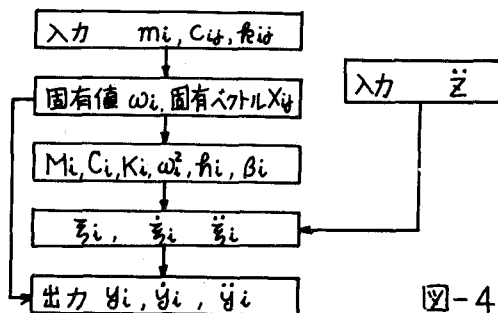


図-4

(i) ブロック図 A 型

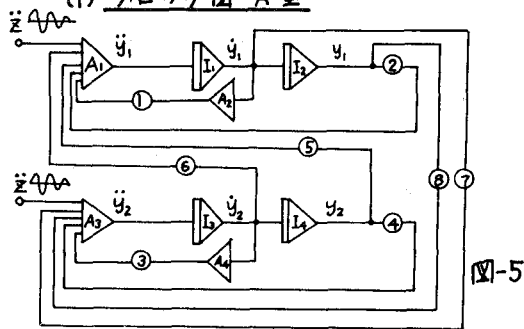


図-5

(ii) ブロック図 B 型

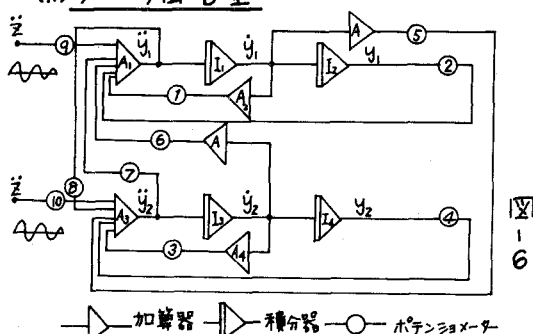


図-6

(iii) ブロック図 C 型

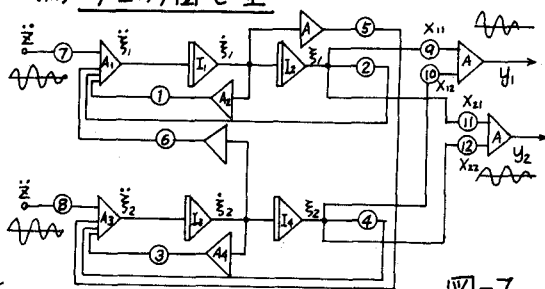


図-7

$\xi_i, \dot{\xi}_i, \ddot{\xi}_i$ を求めてから、固有ベクトルより $y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i$ を求めるのはまったく、デジタルコンピューターの操作と同じである。この方法のブロック図は、図-7に示す。

2-4 計算例

次に示す様な条件の鉄塔を2質点に分けて、デジタルコンピューターとアナログコンピューターで解析を行った。この場合、外力としては、図-8の様なELCENTRO地震波N-S成分を3秒間、デジタルコンピューターでは1/100秒きざみのインパルスに分けて、入力値とし、アナログコンピューターでは地震波をテープに書いて直接カーブリーダーより挿入した。結果は、図-9、図-10に示す通りである。

条件

$EI = 1.4 \times 10^{12} \text{ Kg} \cdot \text{cm}^2$, 高さ $H = 2 \times 10^3 \text{ cm}$
 $G = C_2 = 2.5 \text{ kg} \cdot \text{sec/cm}$, バネ定数 k_f は
 接みの逆マトリックスとして計算した。

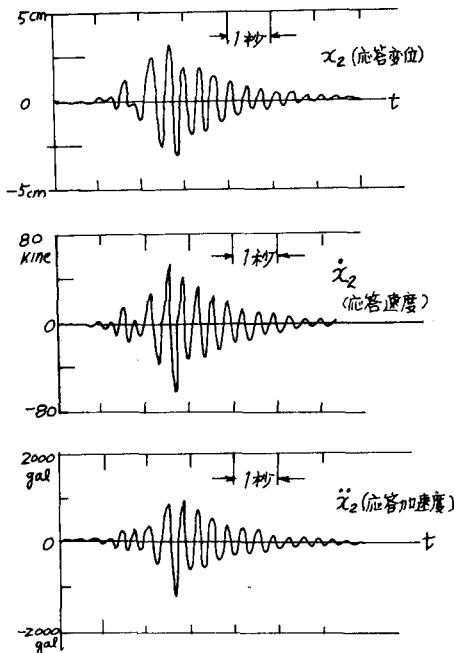


図-9 デジタルコンピューターによる結果

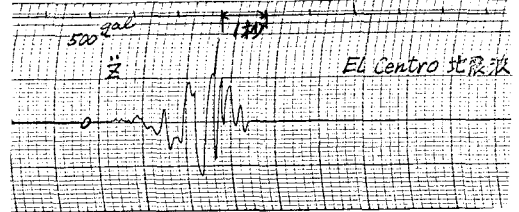


図-8 ELCENTRO 地震波 N-S 成分

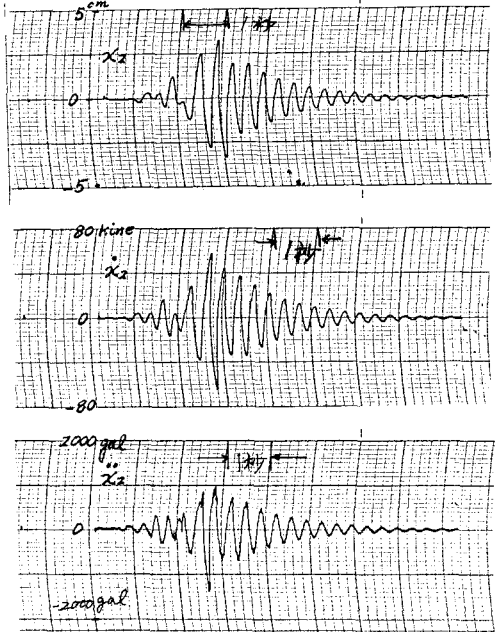


図-10 アナログコンピューターによる結果

2-5 結論

図-9、図-10に見られるようにデジタルの結果とアナログの結果はほとんど完全に一致する。なお、アナログのブロックには、(図-5、図-6、図-7)の様に3種類の型が考えられたが、実際上は、ブロック図A型が、外力 $\ddot{\xi}$ を入れる際に、何ら係数を乗せずに直接 $\ddot{\xi}$ を入れることが出来るので非常に便利である。又、デジタルでは式(5)の様に基準座標 ξ に変換しながら計算しなければならないが、アナログでは、この様な変換を用いることは、ブロック図C型の様になつてがよくない。又デジタルでは、データの整理に多くの時間を必要とする欠点がある。