I－111　斜張橋の撓度理論について（第一報）

北大　正員　工博　渡辺　昇
日立造船　正員　工修　多田和夫
北大院　学正員　○工藤　明

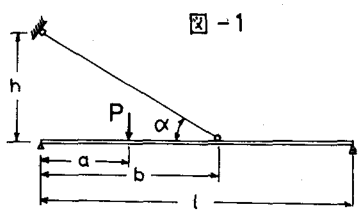
1．まえがき

最近日本でも，斜張橋が注目され，多くの研究者[(1)]がその解析，特性をいわゆる一次理論（弾性理論）で解いて，発表されているが桁の変形を考慮した二次理論（撓度理論）で解いた論文は見あたらないようである。しかし，ドイツの Gerhard Schreier 氏[(2)]が桁の変形を考慮した，付加荷重の方法といわれる方法を発表している。又，それとは別に，独自の方法を考え出したので，簡単な斜張橋を例題に，その解析方法を述べる。

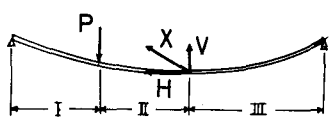
2．斜張橋の撓度理論による解析方法

図－1 のような簡単な斜張橋について考える。支点Aはヒンジ支承，支点Bはローラー支承であり，外力は集中荷重Pが静止して作用している。すると，斜索には引張力が生ずるため，これは図－2のように，桁に対して，上向き垂直力V，および，圧縮軸力Hに分解できる。すなわち，図－2の範囲Ⅰ，および，範囲Ⅱには圧縮軸力，範囲Ⅲには軸力のない状態になる。それぞれの範囲について，次の微分方程式が存在する。

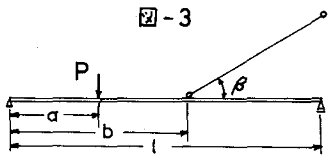
図－1



図－2



図－3



圧縮軸力の作用する範囲Ⅰ，Ⅱでは

$$EI\,y^{IV} + H y'' = 0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

或は

$$y^{IV} + k^2 y'' = 0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

但し　$k = \sqrt{H/EI}$　　EI＝桁の曲げ剛性

圧縮軸力のない範囲では

$$EI\,y^{IV} = 0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

式(1)，(2)，(3)の解を示すと，次の表－1のようになる。

表－1

	範囲　Ⅰ	範囲　Ⅱ	範囲　Ⅲ
微分方程式	$y_I^{IV} + k^2 y_I'' = 0$	$y_{II}^{IV} + k^2 y_{II}'' = 0$	$y_{III}^{IV} = 0$
たわみ曲線	$y_I = A_1 + A_2 x + A_3 \sin kx + A_4 \cos kx$	$y_{II} = A_5 + A_6 x + A_7 \sin kx + A_8 \cos kx$	$y_{III} = A_9 + A_{10} x + A_{11} x^2 + A_{12} x^3$
たわみ角	$y_I' = A_2 + A_3 k \cos kx - A_4 k \sin kx$	$y_{II}' = A_6 + A_7 k \cos kx - A_8 k \sin kx$	$y_{III}' = A_{10} + 2A_{11} x + 3A_{12} x^2$
y''	$y_I'' = -A_3 k^2 \sin kx - A_4 k^2 \cos kx$	$y_{II}'' = -A_7 k^2 \sin kx - A_8 k^2 \cos kx$	$y_{III}'' = 2A_{11} + 6A_{12} x$
y'''	$y_I''' = -A_3 k^3 \cos kx + A_4 k^3 \sin kx$	$y_{II}''' = -A_7 k^3 \cos kx + A_8 k^3 \sin kx$	$y_{III}'' = 6A_{12}$

表－1から明らかのように，合計12個の積分常数がある。これを解くために，境界条件，連続条件，それぞれ4個，8個の合計12個の条件は次のようである。

(i) $x=0$ で, $y_I=0$　(ii) $x=0$ で $M_I=0$　(iii) $x=a$ で $y_I=y_{II}$

(iv) $x=a$ で, $y_I'=y_{II}'$　(v) $x=a$ で $M_I=M_{II}$　(vi) $x=a$ で $Q_I-Q_{II}=P$

(vii) $x=b$ で, $y_{II}'=y_{III}$　(viii) $x=b$ で $y_{II}'=y_{III}'$　(ix) $x=b$ で $M_{II}=M_{III}$

(x) $x=b$ で $Q_{II}-Q_{III}=-V$　(xi) $x=l$ で $y_{III}=0$　(xii) $x=l$ で $M_{III}=0$

以上の12個の境界条件から，12個の積分常数を未知数とする12元連立一次方程式を立て，マトリックス表示すると式(4)のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & \sin ka & \cos ka & -1 & -a & -\sin ka & -\cos ka & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k\cos ka & -k\sin ka & 0 & -1 & -k\cos ka & k\sin ka & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & -1 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & \sin kb & \cos kb & -1 & -b & -b^2 & -b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k\cos kb & -k\sin kb & 0 & -1 & -2b & -3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & k^2 b & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6/k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \\ A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P/H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V/H \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(4)$$

もしも，図－3のような場合，桁に対して，上向き垂直力V，引張軸力Hが作用する。すると，微分方程式は範囲I，IIでは

$$y^{IV}-k^2y''=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5) \qquad 但し\ k=\sqrt{H/EI}$$

範囲IIIでは

$$y^{IV}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

それぞれの範囲の微分方程式とその解は表－1において，$\sin kx \to \sinh kx$，$\cos kx \to \cosh kx$ にして，符号をすべて正に読みかえたものとなる。これに又，12個の境界条件を代入すると，式(4)と同じように，12個の積分常数を決定する12元連立一次方程式となり，マトリックス表示すると，式(7)のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & \sinh ka & \cosh ka & -1 & -a & -\sinh ka & -\cosh ka & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k\cosh ka & k\sinh ka & 0 & -1 & -k\cosh ka & -k\sinh ka & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & -1 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & \sinh kb & \cosh kb & -1 & -b & -b^2 & -b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k\cosh kb & k\sinh kb & 0 & -1 & -2b & -3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & k^2 b & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \\ A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P/H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -V/H \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(7)$$

式(4)，式(7)は集中荷重P，水平分力H，垂直分力Vが与えられると，解くことができる。これらの式を筆算で求めて積分常数を決定するのはめんどうである。そこで電子計算機のサブルーチンを有効に利用して，12個の積分常数 $A_1, A_2 \cdots\cdots A_{12}$ を求めると，表－1より，たわみ，たわみ角，モーメント，剪断力を求めることができる。

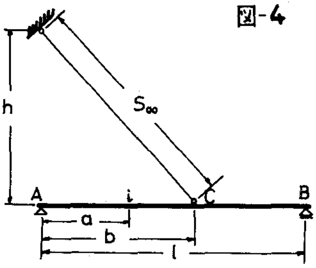


図-4

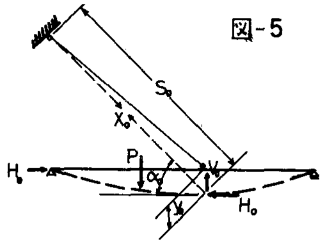


図-5

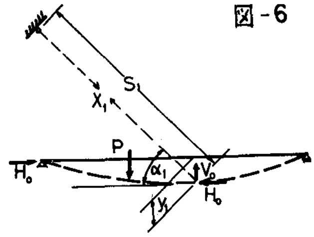


図-6

図－４は無載荷の状態であり，桁のたわみ曲線は水平であり，ザイル内，桁内の力は零である。まず，図－５において，点ｉに集中荷重Ｐ〔kg〕を作用させると，一次理論より一次不静定として解くと，不静力X_0〔kg〕，その水平分力H_0〔kg〕，鉛直分力V_0〔kg〕，ザイル取付点の桁のたわみy_0〔cm〕が求まり，さらに，y_0より幾何学的関係から，角度α_0，斜索長S_0が求まる。次に図－６において，点ｉに集中荷重Ｐが作用し，ザイル取付点にV_0，H_0が作用すると考えて，前述の二次理論からザイル取付点の桁のたわみy_1を求める。そして又，幾何学的関係からα_1，S_1が求まる。又，ザイルの伸びとザイル張力の関係から次式が成り立つ。

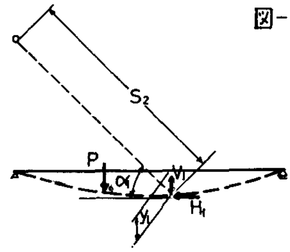


図-7

$$X_1 = X_0 \frac{S_1 - S_{\infty}}{S_0 - S_{\infty}} \quad \cdots\cdots (8)$$

式(8)より X_1 が求まる．従って，$H_1 = X_1 \cos\alpha_1$，$V_1 = X_1 \sin\alpha_1$ で，H_1，V_1が求まる．再び図－７において，点ｉにＰが作用し，H_1，V_1が作用すると考えて，二次理論より，y_2を求めこれよりα_2，S_2を求め，前と同様にしてX_2，H_2，V_2をめる。以上の過程をくり返すことにより，すべての値，すなわちザイルの張力Ｘ，モーメントＭ，剪断力Ｑ，たわみｙ，たわみ角y'がある一定値に収斂する。これらの値が点ｉに外力Ｐ〔kg〕が作用した時の斜張橋の撓度理論による値である．次に，外力Ｐ〔kg〕を他の点に移動させ，同じような操作をくり返して計算する。以上の計算は電子計算機を有効に活用して，求めることができる。この考え方を複雑な斜張橋に応用するには，弾性理論でザイル張力を出し，それを分力にわけて，桁と塔に作用させ２次理論から変形を出して，ザイル取付点の位置に注目して，ザイル張力を算出して，同じ操作をくり返すことにより，変形，断面力を求める。

３．計算例

図－１において，支点Ａより荷重作用点までの距離 $a=9\,m$，ザイル取付点までの距離 $b=21\,m$ $h=18\,m$，桁の曲げ剛性 $EI=6.0\times10^4\,t\cdot m^2$，ザイルの断面積 $As=5.0\,cm^2$，ザイルのヤング率 $E_c=1.4\times10^6\,kg/cm^2$，集中荷重 $P=30\,t$ を作用させた時，ザイルの張力Ｘ，桁のたわみ曲線ｙ，たわみ角y'，モーメントＭ，剪断力Ｑを計算するため，北大電子計算機ＨＡＲＰ１０３のプログラムを作成した。このプログラムでは，まず，図－１の状態の弾性理論によるＸ，ｙ，y'，Ｍ，Ｑを求め，さらに二次理論により，Ｘ，ｙ，y'，Ｍ，Ｑを何回もくり返して，最終的には，ある収斂値で計算機がStopするようにした。このくり返し計算によって順次叩き出した，ザイル張力Ｘ，荷重作用点のたわみy_i，荷重作用点のモーメントM_i，支点Ａの反力Ｒを図－８，図－９，図－１０，図－１１の順に示すと次の図のとおりである。ここではザイル張力の関係が$(X_n - X_{n-1})/X_{n-1} = 0.008$ において，収斂値になるよう

にした。すなわち，これら図から見て，明きらかなようにおおよそ16回のくり返し計算で，収斂値に達していることがわかる。又弾性理論値と撓度理論値を比較すると，ザイル張力は増加し，荷重作用点のたわみ，モーメント，支点Aの反力は減少していることがわかる。

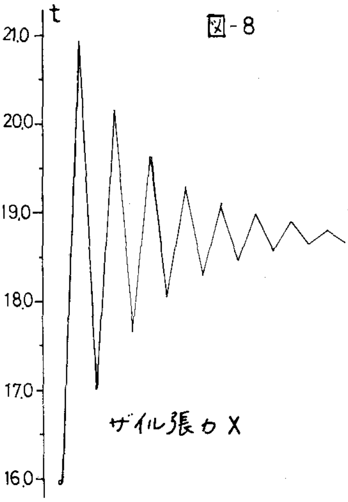


図-8

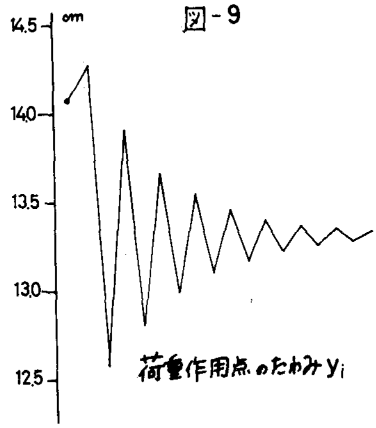


図-9

4. あとがき

本論文では，非常に簡単な斜張橋を例として，解析方法を述べたが，図－12のような高次不静定においては，弾性理論で解くのでさえも，相当めんどうである。又，撓度理論で解く場合，支点条件が重要であり，又積分常数を決める時，桁に対しては40元連立一次方程式を解かなくては，ならないし，荷重P，断面値も実際の値を使わなくてはならない。現在，図－12のような構造系に対して，本解析方法と，G. Schreier 氏の弾性理論影響線を基本にして，計算する方法をプログラム化することを研究中であるので，後日発表したいと考えている。

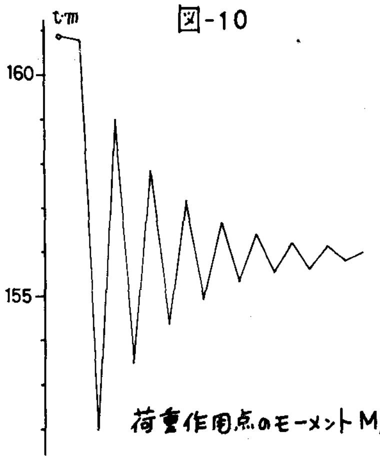


図-10

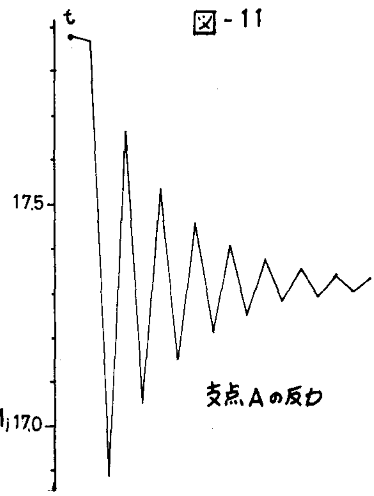
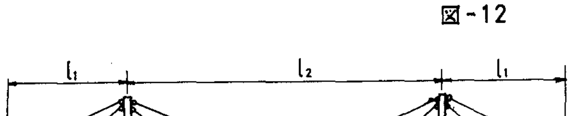


図-11

図-12



参考文献

(1). 渡辺，多田，宮本，　斜張橋の構造特性について，　北海道支部論文集第24号

長谷川，成岡，　還元法による斜張橋の解析，　土木学会誌　vol 53. 5, 1968

橘，中井，川根，　斜張橋の静力学的解析，　関西支部年次学術講演会，講演概要　昭和43年

前田，林，大森，　斜張橋の静定解析について，　同上

(2). G. Schreier : Beiträge zur Anwendung von baustatischen Methoden auf Problem der Verformungstheorie. 1961.