I－96　吊橋の限界風速に対する風の不規則性の影響

中央大学理工学部　正員　岡内　功
東京大学工学部　正員　○宮田利雄

1．緒言

吊橋の耐風性を支配する現象には，自励振動，横座屈，過大な横たわみなどが挙げられるが，これら終局耐力を決する限界風速に対し，風の不規則性が及ぼす影響を考察することは吊橋の合理的，経済的設計を行なう上に必要なことと思われる。本文では，吊橋の捩れ一自由度の自励振動，すなわち，失速フラッター現象に対し風の変動性が及ぼす効果についての一つの考察結果の概要を示す。

変動する風は時間的，空間的にみて常に同じ値を持たず，不規則に変化しているので，これを統計的，確率論的に処理しなければならない。従って，問題の解析にあたって変動する風速，ならびに吊橋の応答を連続マルコフ過程と考え，その推移確率密度函数を求めることにした。この推移確率密度を規定する方程式はいわゆる Fokker－Planck 方程式によって記述される。

すなわち，吊橋の応答を単純マルコフ過程と考えるとき，時刻 t_1 における推移確率密度はそれ以前の時刻 $t_2 (< t_1)$ における確率密度にのみしたがい，これ以外の経過にはよらないことを考慮したわけである。これは，実際の風と応答との関連を考えるとき妥当な関係と言えるものである。

本文では，別稿「吊橋の自励振動に対する準静的空気力の適用」において，捩れ振動に関する運動方程式が導かれたのと同じような考え方に基づき，変動風速を考慮した運動方程式を導いた。さらに，この統計量を含む方程式の解が二乗平均的に安定であるか否か（*stability in mean square*）を論ずることにより，風が変動する場合の自励振動の発振しない（平均）風速の領域を定める。

なお，以下に示す記号ならびに式の展開はいずれも上述の別稿にしたがっていることをはじめにおことわりしておく。

2．風が変動する場合の捩れの運動方程式

変動する風はふつう時刻 t の風速の瞬間値 $V(t)$ を平均風速 $\bar{V}$ と変動風速 $v(t)$ に分解して考える。平均風速（平均流）の方向を橋軸直角方向とし，その変動成分を $v(t)$，鉛直方向の変動成分を $w(t)$ とする。これらの変動成分の平均値はいずれも零である。すなわち，各時刻の瞬間風速値の変動成分は平均値ゼロのまわりに分布している。この分布はふつう，正規分布をしており，$v(t)$，$w(t)$ は定常確率変数としてとりあつかわれる。さらに，エルゴード性が仮定され，時間平均はアンサンブル平均に等しい。

この変動成分 $v(t)$，$w(t)$ が構造物の振動に対して及ぼす効果を検討するのに，変動成分による流れの迎角変化，$w(t)/\bar{V}+v(t)$ を考慮して問題の展開を行なうことにする。この考え方は平均流方向の乱れのスケール L_v が構造物の巾 b よりかなり大きい場合に妥当なものと言える。強風の乱れのスケール L_v はだいたい，開けた海面において，数 $10\,m$ から数 $100\,m$ に達すると報告されている。長大スパンの吊橋の吊構造部の巾 b は約 $30\,m$ 余であるから，乱れのスケールの半分以下となることになる。

従って，風速が変動している場合の自励振動現象を検討するのに上述の考え方が適用しうるとして，振動に伴なう相対迎角 $\gamma(x,t)$ を次のようにおく。

$$\gamma(x,t) = \tan^{-1}\frac{-b'\dot{\varphi}(x,t)+w(x,t)}{\bar{V}+v(x,t)} \tag{1}$$

ただし，$\varphi(x,t)$ は捩れ変位，$\dot{\varphi}(x,t)$ はその時間微分，b'は空気力の橋軸直角方向の分布に関連する量にて，長さの単位を持つ。変動成分 $v(t)$，$w(t)$は橋軸方向の長さ x の函数と考えている。

このとき，別稿における ε は，

$$\varepsilon = \frac{-b'\dot{\varphi}(x,t)+w(x,t)}{\bar{V}+v(x,t)} \tag{2}$$

この ε の函数として，回転方向に作用する空気力 $\bar{M}$

$$\bar{M} = \frac{1}{2}\rho b^2 \bar{V}^2 \cdot C_{M\varphi}(x,t) \tag{3}$$

は表わすことができる。ρは空気密度，$C_{M\varphi}$は別稿の式(4)に示したものと同じものである。

このとき捩れに関する運動方程式は別稿の式(9)の右辺の $\bar{V}^2$の項を積分記号内に入れることにより求められ，最終的には次のような形で表わすことができる。

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \mu g(q_2, \dot{q}_2, v, w) = 0 \tag{4}$$

ただし，ω_2；捩れの固有円振動数，q_2は捩れ振動を $\varphi(x,t) = q_2(t)\cdot\phi_2(x)$ とおいたときの一般座標である。式(4) は変動風速 $v(t)$，$w(t)$ を変数係数とする非線型方程式となっている。

式(3)において，ε の三次以上の項ならびに，風速の変動成分の二次の項を省略し，空力モーメント係数 $C_M(\alpha)$ の迎角 α による多項式近似を $C_M(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3$ とし，$y_1 = q_2$，$y_2 = \dot{q}_2$ とおくと 式(4) の運動方程式は次のような状態方程式になる。

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2 \\
\dot{y}_2 &= -\Big[2\zeta_2\omega_2 + K_2'\bar{V}b' \Big\{ c_1\int_l \Big(1+\frac{v}{\bar{V}}\Big)\phi_2^2 dx + 2c_2 y_1 \int_l \Big(1+\frac{v}{\bar{V}}\Big)\phi_2^3 dx \\
&\quad + 3c_3 y_1^2 \int_l \Big(1+\frac{v}{\bar{V}}\Big)\phi_2^4 dx + 2(c_0+c_2)\int_l \frac{w}{\bar{V}}\phi_2^2 dx + 2(c_1+3c_3)y_1\int_l \frac{w}{\bar{V}}\phi_2^3 dx \\
&\quad + 2c_2 y_1^2 \int_l \frac{w}{\bar{V}}\phi_2^4 dx + 2c_3 y_1^3 \int_l \frac{w}{\bar{V}}\phi_2^5 dx \Big\}\Big] y_2 \\
&\quad + K_2'\bar{V}^2 \Big[\Big\{ c_0 \int_l \Big(1+\frac{2v}{\bar{V}}\Big)\phi_2 dx + c_1 \int_l \frac{w}{\bar{V}}\phi_2 dx + (c_0+c_2)\frac{b'^2}{\bar{V}^2}(0,3)y_2^2 \Big\} \\
&\quad + \Big\{ c_1 \int_l \Big(1+\frac{2v}{\bar{V}}\Big)\phi_2^2 dx + 2c_2 \int_l \frac{w}{\bar{V}}\phi_2^2 dx + (c_1+3c_3)\frac{b'^2}{\bar{V}^2}(0,4)y_2^2 - \frac{\omega_2^2}{K_2'\bar{V}^2} \Big\} y_1 \\
&\quad + \Big\{ c_2 \int_l \Big(1+\frac{2v}{\bar{V}}\Big)\phi_2^3 dx + 3c_3 \int_l \frac{w}{\bar{V}}\phi_2^3 dx + c_2\frac{b'^2}{\bar{V}^2}(0,5)y_2^2 \Big\} y_1^2 \\
&\quad + c_3 \Big\{ \int_l \Big(1+\frac{2v}{\bar{V}}\Big)\phi_2^4 dx + \frac{b'^2}{\bar{V}^2}(0,6)y_2^2 \Big\} y_1^3 \Big]
\end{aligned} \tag{5}$$

ただし，$(0,N) = \int_l \phi_2^N dx$，$K_2' = \dfrac{\rho b^2}{2\theta(0,2)}$，$\zeta_2$；減衰定数，$\theta$；質量慣性モーメント，$\phi_2(x)$ は振動モードを表わす直交函数である。

3．Fokker－Planck 方程式の適用

式(5)において，初期条件および作用空気力が一意的（*deterministic*）な場合には，振動の挙動は一義的に決められる。しかし，風が変動し，その変動成分 $v(t)$，$w(t)$ を不規則な定常確率変数と考えるとき，問題は変数 y_1，y_2を時間函数としてその結合確率密度 $p(y_1, y_2 \mid t)$を既知の初期条件$p(y_1, y_2 \mid 0)$のもとに求めることになる。

変数 $y_1(t)$, $y_2(t)$ を単純マルコフ過程と考えるとき，時刻 t_1 における推移確率分布 $p(\mathbf{y},t|\mathbf{y}_0,t_0)$ はそれ以前の時刻 t_2 ($<t_1$) における確率分布にのみ従い，これ以外の経過にはよらない。この確率密度の時間変化は次のような Fokker-Planck 方程式により与えられる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}(A_i p) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(B_{ij} p) \tag{6}$$

ここで，係数 A_i, B_{ij} はそれぞれ変数 y_i の一次および二次のモーメントの変化率であり，その存在を仮定する。

$$A_i = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta y_i]}{\Delta t}, \quad B_{ij} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta y_i \Delta y_j]}{\Delta t} \tag{7}$$

ただし，$\Delta y_i = y_i(t+\Delta t) - y_i(t)$，$E[\cdots]$ はアンサンブル平均を表わす。

式(5)にて表わされる運動系に式(6)を適用して推移確率密度 p を求めるには，変動風速 $v(t)$, $w(t)$ を正規ホワイトノイズ (white noise) と考える必要がある。すなわち，実際の風において橋軸方向の空間相関のスケールは数 10m を考える必要があるが，ここでは $v(t)$, $w(t)$ は時間的にも，空間的にもデルタ相関するものとする。これは任意の二点に吹く風が統計的に独立であると考えることである。よって，$v(x,t)$, $w(x,t)$ の相関を

$$\left.\begin{aligned} E[v(x_1,t)\,v(x_2,t+\tau)] &= S_{v0}\,\delta(x_1-x_2)\,\delta(\tau) \\ E[w(x_1,t)\,w(x_2,t+\tau)] &= S_{w0}\,\delta(x_1-x_2)\,\delta(\tau) \\ E[v(x_1,t)\,w(x_2,t+\tau)] &= S_{vw0}\,\delta(x_1-x_2)\,\delta(\tau) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

のようにおくことにする。ただし，S_{v0}, S_{w0}, S_{vw0} は変動成分の強度であり，一定値をとるものとする。$\delta(\cdots)$ は Dirac のデルタ関数である。このとき，式(7)に示した係数 A_1, A_2 および B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} は式(5)から求めることができる。

4. 振動の安定領域

式(6)の解 $p(\mathbf{y},t\,|\,\mathbf{y}_0,t_0)$ は t_0 が最初の時刻（すなわち $t_0=0$）となり，このときの状態 $\mathbf{y}_0$ が確率 1 で既知であれば，$\mathbf{y}$ の確率密度となる。これはマルコフベクトルの成分 y_1, y_2 の結合確率密度であり，二次のモーメント（y_1, y_2 の自己相関，相互相関関数）を計算するのに用いることができる。

統計的な量を含む微分方程式により規定される運動系の安定問題には各種の定義が考えられるが，ここでは「平均的に安定である」および「二乗平均的に安定である」という考え方に従がうことにする。すなわち，Q_1, Q_2 を正の定数とするとき

$$E[\,y_2(t)\,] < Q_1 \tag{9}$$

および，

$$E[\,y_2^2(t)\,] < Q_2 \tag{10}$$

が満たされる条件がきまれば，これらが風が変動する場合の自励振動が現われない条件，すなわち，振動の安定領域を与えることになる。

式(9), (10)を満足する条件をもとめるには，まず，式(6)の両辺に y_1, y_2 を掛け，$\mathbf{y}$ の全領域にわたって積分すると一次のモーメント $E[y_1]$, $E[y_2]$ を規定する方程式が得られる。さらに，式(6)の両辺に y_1^2, y_1y_2, y_2^2 を掛け，$\mathbf{y}$ の全領域にわたって積分すると，二次のモーメント $E[y_1^2]$, $E[y_1y_2]$, $E[y_2^2]$ を

規定する方程式がもとめられる。すなわち，

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} E[y_1] \\ E[y_2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ K_2'C_1\bar{V}^2(0,2)-\omega_2^2 & -\{2\zeta_2\omega_2+K_2'C_1b'\bar{V}(0,2)\} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E[y_1] \\ E[y_2] \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} E[y_1^2] \\ E[y_1y_2] \\ E[y_2^2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ K_2'C_1\bar{V}^2(0,2)-\omega_2^2 & -\{2\zeta_2\omega_2+K_2'C_1b'\bar{V}(0,2)\} & 1 \\ S_1\bar{V}^2 & 2\{K_2'\bar{V}^2C_1(0,2)-\omega_2^2\}-S_2\bar{V} & -2\{2\zeta_2\omega_2+K_2'C_1b'\bar{V}(0,2)\}+S_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E[y_1^2] \\ E[y_1y_2] \\ E[y_2^2] \end{vmatrix} \tag{12}$$

ただし，

$$S_1 = 2K_2'^2\Big[2\{C_1^2(0,2)^2+2C_0C_2(0,1)(0,3)\}S_{vo}+\{2C_2^2(0,2)^2+3C_1C_3(0,1)(0,3)\}S_{wo}$$
$$+2\{2C_1C_2(0,2)^2+C_1C_2(0,1)(0,3)+3C_0C_3(0,1)(0,3)\}S_{vwo}\Big]$$

$$S_2 = 4K_2'^2b'\Big[\{C_1^2(0,2)^2+2C_0C_2(0,1)(0,3)\}S_{vo}+\{2(C_0+C_2)C_2(0,2)^2+(C_1+3C_3)C_1(0,1)(0,3)\}S_{wo}$$
$$+\{C_1C_2(0,2)^2+C_1C_2(0,1)(0,3)+2(C_0+C_2)C_1(0,2)^2+2C_0(C_1+3C_3)(0,1)(0,3)\}S_{vwo}\Big]$$

$$S_3 = K_2'^2b'^2(0,2)^2\Big[C_1^2S_{vo}+4(C_0+C_2)^2S_{wo}+4(C_0+C_2)C_1S_{vwo}\Big]$$

式(11)，(12)において一次モーメント，及び二次モーメントが時間の経過と共に収斂する（漸近的に安定である）条件を求めれば，これらが式(9)，(10)を満たす条件となる。収斂する必要十分条件は係数行列の固有値λが負の実部を持つことであるから，λに関する二次及び三次の方程式の根の実部の符号の判定を Routh-Hurwitz の判定条件により行なえば，系が安定，すなわち，自励振動（ここでは捩れ一自由度の失速フラッター）の発振しない条件が得られる。式(11)からは，

$$\bar{V} < \frac{4\zeta_2\omega_2\theta}{(-C_1)\rho b'b^2} \equiv V_* \tag{13}$$

式(12)からは，

$$\bar{V} < V_* - V_1 \tag{14}$$

$$V_1 = \frac{\rho b'b^2}{4\theta(-C_1)}\Big\{C_1^2S_{vo}+4(C_0+C_2)^2S_{wo}+4(C_0+C_2)C_1S_{vwo}\Big\}$$

がもとめられる。

式(13)に示したV_*は，風が変動しない場合の失速フラッターの発振風速（別稿；吊橋の自励振動に対する準静的空気力の適用　参照）であるから，「平均的に安定である」条件は風が変動しない場合の自励振動の発振しない条件と同じ結果となっている。「二乗平均的に安定である」条件は，式(14)からわかるとおり，（失速フラッターの発振する条件が$C_1<0$であるから）V_*よりV_1だけ低い風速以下では振動が起こらないということである。すなわち，風が変動する場合の失速フラッターの発振風速は，変動しない場合よりV_1だけ低下することを示している。

以上において，風の不規則性が吊橋の自励振動，とくに失速フラッター現象におよぼす効果について考察を試み，発振風速の低下することを導いたのであるが，さらに，乱れのスケールに対する仮定を実際に即したものとし，若干修正を施せばより精度のよい結果が得られるものと思われる。また，曲げと捩れの連成振動，横座屈の問題などへも拡張が可能である。以上の問題，及び風洞内にて格子によって風を乱だした場合の実験結果などについては別の機会に報告したいと考えている。