

中央大学理工学部

正員 ○ 岡 内 功

東京大学工学部

正員 宮 田 利 雄

1. まえがき

風により吊橋に誘起される破壊的振動が空気力の負減衰による自励振動として解されることは既にしばしば報告されていることである。したがって、その振動の発振風速は、振動に際して吊構造部には作用するいわゆる動的空気力が知られれば、この空気力の負減衰効果が正の構造減衰を打ち消す時の風速として求められるわけである。この線に沿って、筆者らも従来から動的空気力の実測を行なうなど各種の研究を進めているところであるが、この度、静的三分力の測定結果に基づいて上記動的空気力を与え、この空気力を適用して吊橋の特にねじれの自励振動問題につき若干の検討を行なった。すなわち、準静的空気力の適用によって吊橋の主として矢速フラッター型自励振動の解明を試みたのである。

この種の問題に対する準静的空気力の適用は既にギャロップ現象に關して Den Hartog や G. Parkinson らが行なっていることはよく知られているが、本文に述べる解析は Parkinson らが角柱の曲げ振動に対して示した方法も吊橋のねじれ振動の場合に拡張しているものといえよう。以下その概要を報告することとする。

2. 振動中の吊構造部に作用する空気力

速度 V の風が吊構造部の水平軸に対して α_0 の傾き角(以後初期迎角と呼ぶ)をもつて吹いているとして、その風の中で鉛直たわみとねじれの振動をしている吊構造部が受ける空気力を考えることとする。

このとき、吊構造部は空気流に対して相対運動しているために、迎角が α_0 と違ってくるが、例えば速度 $\dot{y}$ で鉛直たわみ振動をしているば迎角は $\alpha_0 + \tan^{-1}(\dot{y}/V)$ となる。ここで負号がつくのは相対速度が変位と逆方向であるからである。同様に、角速度 $\dot{\phi}$ でねじれ振動をしていれば回転中心から x の距離にある吊構造部分の迎角は、

$\alpha_0 + \phi + \tan^{-1}(-x\dot{\phi}/V)$ ということになるわけである。しかし、こ

うように断面内各点で迎角が異なることは取扱いを厄介なものにするので、ねじれ振動にともなう相対迎角については、これを全長に対して $\tan^{-1}(-b'\dot{\phi}/V)$ とおくことにする。この置換はかなり大胆な仮定であるが、回転中心から b' の距離にある点の相対迎角で全長の相対迎角を代表させたと考えられるものであり、また b' は空気力の横断面内の分布状態に関連する量として考えられる。

以上によつて、鉛直たわみとねじれの振動をしているときの吊構造部の迎角 α は、図-1 に示すように

$$\alpha = \alpha_0 + \phi + \tan^{-1}(-\dot{y} - b'\dot{\phi}/V) \quad (1)$$

として表わされ、また吊構造部に作用する風速は、図示するように

$$V_{rel} = V \sec \gamma, \quad \text{ここには} \quad \gamma = \tan^{-1}(-\dot{y} - b'\dot{\phi}/V) \quad (2)$$

となる。そして、静的三分力測定による空気力係数が知られていれば、振動中の吊構造部に仮らく空

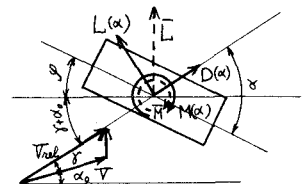


図-1. 吊構造部に仮らく空気力

気力は、 ρ を空気密度、 b を橋幅とすると、動的成分を含めてそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} L(\alpha) &= C_L(\alpha) \frac{\rho b}{2} V_{rel}^2 \\ D(\alpha) &= C_D(\alpha) \frac{\rho b}{2} V_{rel}^2 \\ M(\alpha) &= C_M(\alpha) \frac{\rho b^2}{2} V_{rel}^2 \end{aligned} \right\} (3)$$

の各式より求めることができることとなる。ただし、一般に静的三分力の測定値は図-1に示されているように風軸（風向を基準とする直交軸）に作用する成分で与えられることが多いが、この場合には、鉛直方向および回転方向に作用する空気力成分 $\bar{L}$ および $\bar{M}$ が

$$\bar{L} = L(\alpha) \cos \beta + D(\alpha) \sin \beta, \quad \bar{M} = M(\alpha) \quad \text{ここに } \beta = \alpha_0 + \gamma$$

となる。（したがって、この $\bar{L}$ と $\bar{M}$ を

$$\bar{L} = C_{Ly} \frac{\rho b}{2} V^2, \quad \bar{M} = C_{My} \frac{\rho b^2}{2} V^2 \quad (4)$$

と表わすならば、 C_{Ly} と C_{My} は

$$\left. \begin{aligned} C_{Ly} &= [C_L(\alpha) \cos \beta + C_D(\alpha) \sin \beta] \sec^2 \gamma \\ C_{My} &= C_M(\alpha) \sec^2 \gamma \end{aligned} \right\} (5)$$

として表わされる。

ところで、(3)式における空気力係数は、前述のように静止模型に対する三分力の測定実験により求められるのであるが、その値を次の(5)式のように α の多項式で近似すれば、(5)式の C_{Ly} と C_{My} を最終的にはねじれ角 γ および相対迎角 β の関数として表わすことができるようになる。

$$\left. \begin{aligned} C_L(\alpha) &= a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots \\ C_D(\alpha) &= b_0 + b_1 \alpha^2 + b_2 \alpha^4 + \dots \\ C_M(\alpha) &= c_0 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + \dots \end{aligned} \right\} (6)$$

ただし、ここで初期迎角 α_0 を無視しても一般性を失わない。それは(6)式のように多項式展開を行なうさいに $\alpha = \alpha_0$ を原点として各係数を定めればよいからである。

3. 失速フラッター型自動振動を行なう吊橋の運動方程式

失速フラッター型自動振動の場合にはほとんどねじれのみの1自由度振動状態にあることが知られているが、このように気流中でねじれ振動を行なう吊橋の運動方程式は次のように書ける。

$$\theta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C_{20} \frac{\partial y}{\partial t} + EC_w \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - (GK + \frac{b^2}{2} H_w) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{8fb}{l^2} H_2 = \bar{M}(x, t) \quad (7)$$

ただし、 θ : 質量慣性モーメント、 C_{20} : 減衰係数、 EC_w : 曲げねじれ剛性、 GK : ねじれ剛性、

H_w : 死荷重によるケーブル水平張力、 H_2 : 張力の増分、 l : スパン、 f : サグである。ここで吊橋構造部の振動を $y(x, t) = \sum_r g_{2r}(t) \phi_{2r}(x)$ とおき、モード間の連成がないものとすれば、(7)式より r 次のモードに対して

$$(\ddot{g}_{2r} + 2\zeta_{2r}\omega_{2r}\dot{g}_{2r} + \omega_{2r}^2 g_{2r}) \int_L \phi_{2r}^2(x) dx = \frac{1}{\theta} \int_L \bar{M}(x, t) \phi_{2r}(x) dx \quad (8)$$

がえられる。ただし、 ω_{2r} : r 次のねじれ固有振動数、 ζ_{2r} : 減衰係数、 g_{2r} : 一般座標、 ϕ_{2r} : 直交関数である。(8)式右辺の $\bar{M}(x, t)$ は前節で述べたように γ および $\dot{\gamma}$ の関数として考えることができるから、 $y = g_2 \phi_2$ 、 $\dot{y} = \dot{g}_2 \phi_2$ とおき添字 r を省略すると、(8)式はさらに次のように書き直される。

$$\ddot{g}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{g}_2 + \omega_2^2 g_2 = K_2 \int_0 C_{My} (g_2, \dot{g}_2) \phi_2(x) dx \quad (9)$$

ここで $K_2 = \rho b^2 V^2 / 2\theta \int_0^{\pi} \phi^2(x) dx$ である。

(9)式は明らかに非線形であるが、これはまた

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 + \mu g(\theta_2, \dot{\theta}_2) = 0 \quad (10)$$

と表わすことができ、 μ が十分小さければ Krylov-Bogoliubov の近似法により解を求めることができて、すなわち、解は $\theta_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2)$ とおき、振幅 A_2 、位相 ψ_2 は一周期 $T = 2\pi/\omega_2$ の間にはきわめて徐々に変化する値であると考え、 A_2 および $\psi = \omega_2 t + \psi_2$ は

$$\frac{dA_2}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_2} \int_0^{2\pi} \mu g(A_2 \sin \phi, A_2 \omega_2 \cos \phi) \cos \phi d\phi \equiv \Xi(A_2) \quad (11)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_2 + \frac{1}{2\pi A_2 \omega_2} \int_0^{2\pi} \mu g(A_2 \sin \phi, A_2 \omega_2 \cos \phi) \sin \phi d\phi \equiv \Omega(A_2) \quad (12)$$

により定められる。

4. 失速フラッター型自励振動の発振条件

以上のようにして求められる(9)式の解が定常である条件、すなわち自励振動が定常状態を保ちリミットサイクルを形成する条件は(11)式から $\Xi(A_2) = 0$ であり、さらに振幅 A_2 のリミットサイクルが発散しないための条件は $d\Xi(A_2)/dA_2 < 0$ である。したがって、自励振動が静止の状態 ($A_2 = 0$) から発振するための条件は $\Xi(0) > 0$ および $d\Xi(A_2)/dA_2 > 0$ であることがわかる。

そこで、これらの条件を用いて失速フラッター型自励振動が発振する風速の領域を定めることにする。いま、 $C_{My} = C_0 + C_1 \alpha + C_2 \alpha^2 + \dots + C_7 \alpha^7$

$$\left. \begin{aligned} Y &= \tan^{-1}(-b'\dot{\psi}/V) \approx (-b'\dot{\psi}/V) - \frac{1}{3}(-b'\dot{\psi}/V)^3 + \frac{1}{5}(-b'\dot{\psi}/V)^5 - \frac{1}{7}(-b'\dot{\psi}/V)^7 \\ \sec^2 Y &= 1 + (-b'\dot{\psi}/V)^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

とおけば、(9),(11)式より

$$\begin{aligned} \Xi(A_2) = & -\frac{K_2}{2\pi\omega_2} \left\{ A_2 \omega_2 \frac{b'}{V} \left\{ \left(\frac{2\xi_2\omega_2}{K_2} \frac{V}{b'} + C_1(0,2) \right) \pi + 3C_3(0,4)A_2^2 \frac{\pi}{4} + 5C_5(0,6)A_2^4 \frac{\pi}{8} + 7C_7(0,8)A_2^6 \frac{5\pi}{64} \right\} \right. \\ & + \frac{1}{3}A_2^3 \omega_2^3 \left(\frac{b'}{V} \right)^3 \left\{ (2C_1 + 3C_3)(0,4) \frac{3\pi}{4} + 6(C_3 + 5C_5)(0,6)A_2^2 \frac{\pi}{8} + 5(2C_5 + 21C_7)(0,8)A_2^4 \frac{3\pi}{32} + 14C_7(0,10)A_2^6 \frac{3\pi}{128} \right\} \\ & + \frac{1}{5}A_2^5 \omega_2^5 \left(\frac{b'}{V} \right)^5 \left\{ (15C_5 - 2C_7)(0,6) \frac{5\pi}{8} + (315C_7 - 6C_9)(0,8)A_2^2 \frac{5\pi}{32} - 10C_9(0,10)A_2^4 \frac{3\pi}{128} - 14C_7(0,12)A_2^6 \frac{5\pi}{512} \right\} \\ & + \frac{1}{105}A_2^7 \omega_2^7 \left(\frac{b'}{V} \right)^7 \left\{ (6C_7 - 7C_9 - 70C_5 + 105C_7)(0,8) \frac{35\pi}{64} + 2(9C_9 - 35C_5 - 735C_7)(0,10)A_2^2 \frac{7\pi}{128} \right. \\ & \left. \left. + 5(6C_5 - 49C_7)(0,12)A_2^4 \frac{7\pi}{512} + 42C_7(0,14)A_2^6 \frac{5\pi}{16384} \right\} \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $(0, \pi) = \int_0^{\pi} \phi^2(x) dx$ である。(14)式より $A_2 = 0$ が $\Xi(A_2) = 0$ の根であることがわかるが、そのとき、 $\left[\frac{d\Xi(A_2)}{dA_2} \right]_{A_2=0} = -\frac{K_2 b'}{2V} \left\{ \frac{2\xi_2\omega_2}{K_2} \frac{V}{b'} + C_1(0,2) \right\}$ (15)

したがって、自励振動が発生する条件は

$$\frac{2\xi_2\omega_2}{K_2} \frac{V}{b'} + C_1(0,2) \leq 0 \quad (16)$$

となり、これより $C_1 \geq 0$ の場合には左辺が常に正であるから自励振動は発現しないことが知られる。

これに対して、 $C_1 < 0$ の場合には(16)式から

$$V \geq -\frac{1}{C_1} \frac{4\xi_2\omega_2\theta}{\rho b'b^2} \quad (17)$$

の風速において自励振動が現れることになるわけである。なお、(14)式において $A_2 = 0$ のときは $\Xi(A_2) = 0$ となつて $\Xi(0) > 0$ の条件を満足していないが、これは風速が(17)式で与えられる値以上になつても、何らかの初期振幅が存在していなければ自励振動が発現しないことを意味すると考えられる。

上述のように、発振条件として C_1 の正負が問題となるが、この C_1 は(13)式からわかるようにモーメント係数 $C_M(\alpha)$ 曲線の勾配である。したがって、発振風速 V_F はまた次のように表わすことができる。すなわち、

$$V_F = \frac{1}{\left| \frac{dC_M(\alpha)}{d\alpha} \right|} \frac{4\zeta \omega_n \theta}{\rho b' b^2} \quad \text{ただし} \quad \frac{dC_M(\alpha)}{d\alpha} < 0 \quad (18)$$

(18)式により $C_M(\alpha)$ 曲線が負勾配をもつ迎角範囲において失速フラッター型自励振動の発現が予測されることとなるが、この傾向を顕著に示す実験結果を図-2にあげる。図-2は、筆者らが実施した全橋模型による風洞実験において失速フラッター型自励振動が発生したケースの発振風速 V_F と C_M 曲線の関係を示すものであるが、自励振動が発生した迎角範囲と C_M 曲線が負勾配である迎角範囲がほぼ一致しており、これらによって前述の考え方が実験結果の傾向をおおむねとらえていけると見なされる。

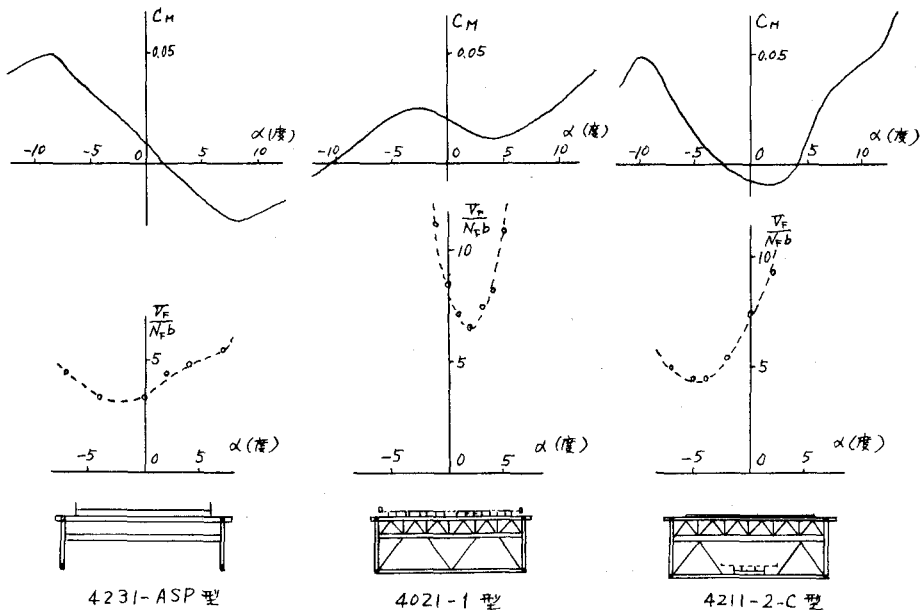


図-2. 自励振動の発振風速と C_M 曲線の関係を示す実験結果

5. おまけ

以上、吊橋の失速フラッター型自励振動を解析するに当って準静的空気力を適用した結果を述べたが、これにより発振風速は、減衰率、固有振動数、慣性モーメント、主げたの間隔、 C_M 曲線の勾配、あるいは b' などの影響を受けることが知られた。したがって、実用上の観点からすれば、例えば C_M 曲線の負勾配の小さい断面を選ぶ必要があるなどの方針がえられるであろう。しかし、それとともに b' についてその物理的意義や特性を明確にすることが今後必要であることも注意しなければならぬ。それは b' が C_M 曲線の勾配とともに発振風速を決定する重要な因子であるからである。また、境界条件の誘導において b' が正であることを前提としたが、この点についてもなお検討の余地が認められる。

このようなわけで、現在、 b' と動的空気力の実測値との関連性の追究などを通じて上述の諸問題の検討を進めていることを終りに付言しておくものである。