

京都大学工学部 正員 工博 小西一郎
 京都大学工学部 正員 工博 白石成人
 京都大学工学部 正員 工修 宇都宮英彦
 京都大学大学院 学生員 ○松本 勝

§1. まえがき

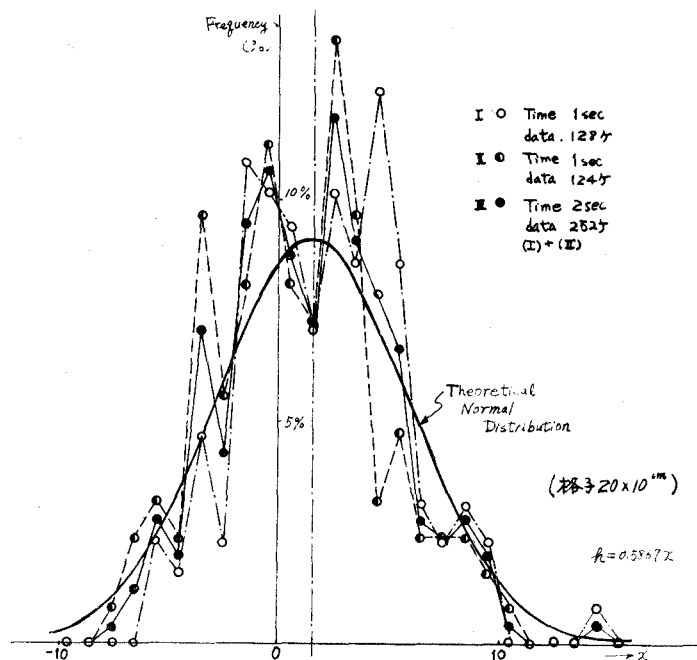
構造物の耐風安定性を考える上で、変動風に対する構造物の応答を知ることは、現在、多くの研究者の注目するところである。Scanlan や Salazar によれば、構造物の応答（たわみ α 、ねじれ角 β ）に対する揚力およびトルクモーメントは、

$$L(x) = H_1^* \dot{\alpha} + H_2^* \alpha + H_3^* \ddot{\alpha} + f(x) \quad (1)$$

$$M(x) = A_1^* \dot{\alpha} + A_2^* \alpha + A_3^* \ddot{\alpha} + g(x) \quad (2)$$

のように与えられ、この形は、これまでの線形理論で空気の慣性項を無視した場合の一般式である。ここで、式(1)および(2)において、 H_1^* , H_2^* , H_3^* , A_1^* , A_2^* および A_3^* の各係数を有する項を、平均風速により生ずる空気力と仮定すれば、これらの値は、定常風で行なった実験や、§2で説明する方法により決定すること⁽¹⁾ができる。 $f(x)$ および $g(x)$ は非線形の項をも含めたその他の要素を有する空気力とする。さて線型構造系に関する Input-Output の関係は、(Random Process に従う Input に対する場合を)

考えるとき、この Process が、ガウス型であれば、その取り扱いには極めて簡単化される。著者らはさきに、風洞内に格子を設置し、これより変動風の Power Spectral Density, および自己相関⁽²⁾数を求めた⁽²⁾。この結果、風洞内で発生した変動風は Narrow Band Random Noise の傾向にあり、振動周波数に対する Power はほぼ一様であり、その確率密度関数も正規分布と考えることが⁽²⁾できるようである。(図-1) 従って、本研究では、ガウス型 Random Process として式(1), (2)に対する系の解析を試みた。



(図-1) 振動周波数確率密度分布

トラス型部材模型および、

Plate型部分模型について、たわみ、ねじれ2自由度振動実験を行ない、そのResponseより、たわみおよびねじれのSpectral Densityを求める。また運動系のたわみおよびねじれに対する運動方程式より、Frequency Response Functionを求める。従って、 $f(x)$ および $g(x)$ のSpectral Densityが求まり、 $f(x)$ および $g(x)$ の振動数特性を決定することができる。この方法については§3で説明する。次に、 $f(x)$ および $g(x)$ の大きさを決定するために、簡接アナログシミュレーションを用いる。つまり、風洞で求めたResponseとアナログより求めたResponseが一致するような $S(x)$ と $g(x)$ の値を見つけ出せばよい。以上のようにして、 $f(x)$ および $g(x)$ の形が求まれば、アナログシミュレーションによって、式(1)および(2)の各係数(H_1^* , H_2^* , H_3^* , A_1^* , A_2^* , A_3^*)が、部分模型の耐風密定性に及ぼす影響を知ることができる。

§2 擬定常空気力およびTheodorsen関数より求めた各係数

擬定常空気力⁽³⁾は、

$$L = \frac{\rho U^2}{2} \cdot c \cdot l \cdot \frac{dC_L}{d\alpha} \left[\alpha + \frac{1}{U} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c}{4} \frac{1}{U} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] \quad (3)$$

$$M = \frac{\rho U^2}{2} \cdot c^2 l \left\{ -\frac{c\pi}{8U} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{dC_L}{d\alpha} \left[\alpha + \frac{1}{U} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c}{4} \frac{1}{U} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] \right\} \quad (4)$$

従って、各係数は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= -\frac{\rho c l}{2m} \cdot \frac{dC_L}{d\alpha} \cdot U, & H_2 &= -\frac{\rho c^2 l}{8m} \cdot \frac{dC_L}{d\alpha} \cdot U, & H_3 &= -\frac{\rho c l}{2m} \cdot \frac{dC_L}{d\alpha} \cdot U^2 \\ A_1 &= \frac{\rho c^2 l}{8I_p} \cdot \frac{dC_L}{d\alpha} \cdot U, & A_2 &= \frac{\rho c^3 l}{32} \left(\frac{dC_L}{d\alpha} - 2\pi \right) U, & A_3 &= \frac{\rho c^2 l}{8I_p} \cdot \frac{dC_L}{d\alpha} \cdot U^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

一方、Theodorsen関数より求めた各係数は、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= -\frac{\pi \rho c l}{m} \cdot U \sqrt{F^2(k) + G^2(k)}, & A_1 &= \frac{\pi \rho c^2 l}{4I_p} \cdot U \sqrt{F^2(k) + G^2(k)} \\ H_2 &= -\frac{\pi \rho c^2 l}{4m} \cdot U (1 + \sqrt{F^2(k) + G^2(k)}), & A_2 &= \frac{\pi \rho c^3 l}{16I_p} \cdot U (\sqrt{F^2(k) + G^2(k)} - 1) \\ H_3 &= -\frac{\pi \rho c l}{m} \cdot U^2 \sqrt{F^2(k) + G^2(k)}, & A_3 &= \frac{\pi \rho c^2 l}{4I_p} \cdot U^2 \sqrt{F^2(k) + G^2(k)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

但し、 ρ ：空気密度、 U ：風速

α ：迎角、 C_L ：揚力係数、 m ：

部分模型質量、 I_p ：部分模型質

量慣性モーメント、 l ：部分模

型スパン長、 c ：部分模型幅

$F(k)$ ：Theodorsen関数の実数部

$G(k)$ ：Theodorsen関数の虚数部

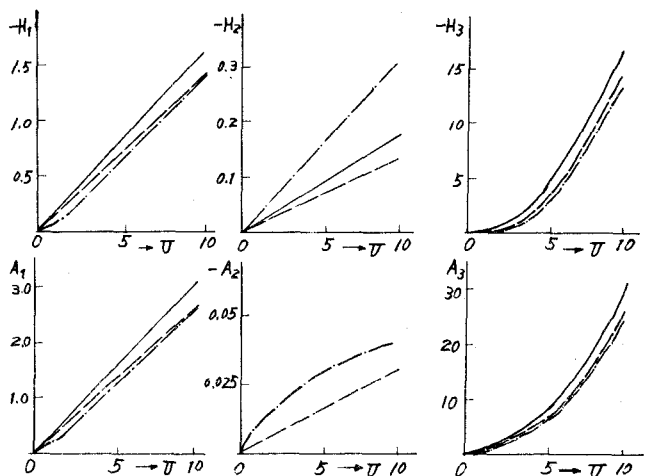
式(5)、(6)を用いて、Plate型部

分模型について各係数を求めた結果

を図-2に示す。但し、Plate型部

分模型のDimensionは、次の値であ

る。



(図-2) 各係数の値

$$\left(m = 0.686 \text{ (kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}) \right), \quad I_p = 2.645 \times 10^{-2} \text{ (kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2), \quad f = 0.125 \text{ (kg} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^4) \\ c = 0.30 \text{ (m)}, \quad l = 0.94 \text{ (m)}, \quad \omega_k = 9.11 \text{ (sec}^{-1}), \quad \omega_k = 9.24 \text{ (sec}^{-1})$$

図-2において、実線は、 $dC/dx = 2\pi$ としたときの結果を表わし、破線は、 $dC/dx = 5.50$ としたときの結果を表わし、一点鎖線は、Theodorsen 関数による結果を表わす。

§ 3. $f(t)$ および $g(t)$ の Spectral Density

系の運動方程式は、式(7), (8)で表わせる。

$$\begin{cases} \ddot{h} + 2\zeta_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h - H_1 \dot{\alpha} - H_2 \alpha - H_3 \dot{\alpha} = \frac{1}{m} f(t) \\ \ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha - A_1 \dot{h} - A_2 \dot{\alpha} - A_3 \alpha = \frac{1}{I_p} g(t) \end{cases} \quad (7)$$

$$h = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (9)$$

次に、 h および α を式(9)のようにおき、 $f(t)$ および $g(t)$ をそれぞれ $I_h \delta(t)$, $I_\alpha \delta(t)$ において、両辺の Fourier 変換をとって、Frequency Response Function を求めると、式(10), (11), (12) のようになる。

$$|H_{hh}(\omega)|^2 = \left(\frac{I_h}{m} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\Sigma_h}{\Omega_0} \right)^2 + \omega^2 \left(\frac{K_h}{\Omega_0} \right)^2 \right\} \quad (10)$$

$$|H_{h\alpha}(\omega)|^2 = \left(\frac{I_h}{I_p} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\Sigma_\alpha}{\Omega_1} \right)^2 + \omega^2 \left(\frac{K_\alpha}{\Omega_1} \right)^2 \right\} \quad (11)$$

$$|H_{\alpha h}(\omega)|^2 = \frac{1}{(M_1^2 + \omega^2 M_2^2)^2} \left[\left\{ M_1 \left(\frac{I_h}{m} + \frac{I_\alpha}{I_p} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) + M_2 \omega^2 \frac{I_\alpha}{I_p} \frac{\Omega_4}{\Omega_1} \right\}^2 + \omega^2 \left\{ M_1 \frac{I_\alpha}{I_p} \frac{\Omega_4}{\Omega_1} - M_2 \left(\frac{I_h}{m} + \frac{I_\alpha}{I_p} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \right\}^2 \right] \quad (12)$$

$$|H_{\alpha\alpha}(\omega)|^2 = \frac{1}{(M_1^2 + \omega^2 M_2^2)^2} \left[\left\{ \frac{\Sigma_\alpha}{\Omega_1} \frac{I_\alpha}{I_p} (M_1^2 + \omega^2 M_2^2) + \left(\frac{I_h}{m} + \frac{I_\alpha}{I_p} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) (K_\alpha M_1 + \Sigma_\alpha M_2) \frac{A_1 \omega^2}{\Omega_1} + \frac{A_1 \omega^2 I_\alpha}{\Omega_1 I_p} \frac{\Omega_4}{\Omega_1} (\omega^2 K_\alpha M_2 - \Sigma_\alpha M_1) \right\}^2 + \omega^2 \left\{ \frac{A_1 \Sigma_\alpha}{\Omega_1} \left(\frac{I_h}{m} + \frac{I_\alpha}{I_p} \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) M_1 + \omega^2 M_2 \frac{I_\alpha}{I_p} \frac{\Omega_4}{\Omega_1} - \frac{I_\alpha}{I_p} \frac{K_\alpha}{\Omega_1} (M_1^2 + \omega^2 M_2^2) \right\}^2 \right] \quad (13)$$

$$\text{但し} \begin{cases} \Sigma_h = -\omega^2 + \omega_h^2, & K_h = 2\zeta_h \omega_h - H_1, & \Sigma_\alpha = -\omega^2 + \omega_\alpha^2 - A_3, & K_\alpha = 2\zeta_\alpha \omega_\alpha - A_2 \\ \Omega_0 = \Sigma_h^2 + \omega^2 K_h^2, & \Omega_1 = \Sigma_\alpha^2 + \omega^2 K_\alpha^2, & \Omega_2 = H_2 \omega^2 K_\alpha + H_3 \Sigma_\alpha, & \Omega_4 = H_2 \Sigma_\alpha - H_3 K_\alpha \\ M_1 = \Sigma_h + A_1 \omega^2 \frac{\Omega_4}{\Omega_1}, & M_2 = K_h - \frac{A_1 \Omega_2}{\Omega_1} \end{cases}$$

たわみおよびねじれの Response の Spectral Density: $S_h(\omega)$, $S_\alpha(\omega)$ と $f(t)$, $g(t)$ の Spectral Density: $\Phi_h(t)$, $\Phi_\alpha(t)$ および上で求めた Frequency Response Function の関係は次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} S_h(\omega) \\ S_\alpha(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{hh}^2(\omega) & H_{h\alpha}^2(\omega) \\ H_{\alpha h}^2(\omega) & H_{\alpha\alpha}^2(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_h(\omega) \\ \Phi_\alpha(\omega) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

式(14)を変形することによつて、 $\Phi_h(\omega)$, $\Phi_\alpha(\omega)$ は、式(16)より求めることができる。

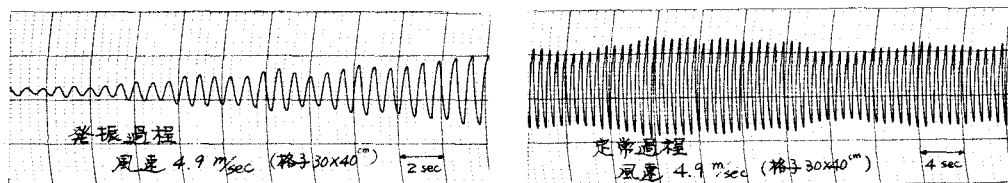
$$\begin{Bmatrix} \Phi_h(\omega) \\ \Phi_\alpha(\omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{H_{hh}^2(\omega) H_{\alpha\alpha}^2(\omega) - H_{h\alpha}^2(\omega) H_{\alpha h}^2(\omega)} \begin{bmatrix} H_{\alpha\alpha}^2(\omega) & -H_{h\alpha}^2(\omega) \\ H_{hh}^2(\omega) & -H_{\alpha h}^2(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_h(\omega) \\ S_\alpha(\omega) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

一方、たわみに対する衝撃力 I_h とねじれに対する衝撃力 I_α の大きさの比は、次のようにして近似を求めることができる。つまり、鉛直たわみ 1 自由度振動およびねじれ 1 自由度振動における衝撃力 I_h , I_α によるそれぞれの Response は、

$$h(t) = \frac{I_h}{m} \sin\left(\sqrt{\omega_h^2 - \left(\frac{k_h}{2}\right)^2} t\right) \exp\left(-\frac{k_h}{2} t\right) \quad (16)$$

$$\alpha(t) = \frac{I_\alpha}{I_p} \sin\left(\sqrt{\omega_\alpha^2 - \left(\frac{k_\alpha}{2}\right)^2} t\right) \exp\left(-\frac{k_\alpha}{2} t\right) \quad (17)$$

で表わされるから、たわみ1自由度振動およびねじれ1自由度振動に対して、風洞実験より求めた Response も、衝撃力 I_h, I_α による Response と考えることにより、近似的に I_h, I_α の大きさの比も求めることができる。トラス型部分模型についての2自由度振動実験による Response の実験データ一例を図-3に示す。



(図-3) 2自由度振動 Response の1例

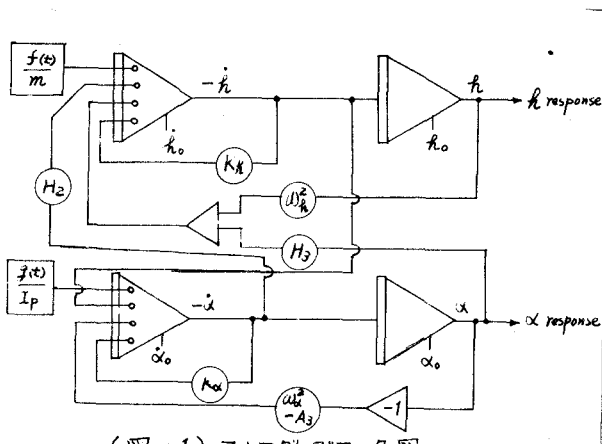
§4 アナログシミュレーションの利用⁽⁴⁾

§1で述べたように、アナログシミュレーションによって $f(t)$ および $g(t)$ の大きさを求めることができる。式(7)、(8)で表わされる系の運動方程式のアナログブロック図を図-4に示す。

この図で用いられている記号は、下記のとおりである。



この回路において、結線を適当にと



(図-4) アナログブロック図

りはすすることにより、また、各ポテンショメータの値を変化させることにより、空気力の各係数 ($H_1, H_2, H_3, A_1, A_2, A_3$) が系の安定性にどのような影響を及ぼすかを知らることができる。

参考文献

(1) A. Salazar & R. H. Scanlan "Aerodynamic Instability of Suspension Bridges"

Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE EM2, April 1968 pp489~519

(2) 昭和43年度「関西支部年次学術講演概要」 土木学会関西支部 pp I-25-1~2

(3) Y. C. Fung "An Introduction to The Theory of Aeroelasticity" pp186~245 Wiley 1955

(4) R. H. MacNeal "Electric Circuit Analogies for Elastic Structures" Wiley 1962