

北大工学部 正員 薄 木 征 三

北見工業大学 正員 菅 原 登

1. 要旨 曲線橋においては、特にねじりに対する有利性から箱桁形式のものが広く採用されているが、フラレツ巾と桁長との比が大きくなれば直線箱桁の場合と同様の現象、即ちフラレツにおける応力分布の構理論からの差異 (Shear lag 現象) が生ずる事が予想される。これを明らかにするには、厳密には箱桁を折板構造として解析せねばならないが、これへの漸進的理論として、曲線桁の曲げ応力に対してフラレツを扇形 *Scheibe* と考え、直線箱桁の場合と同様の手法によって応力関数を求め、ねじりに対しては全断面有効として曲げ応力に加わるものとして解析した。

2. 極座標での応力関数 $F(r, \theta)$ 記号は慣用に従うと、応力関数 F の満たすべき条件は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (1)$$

応力成分; $\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}$, $\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)$,

歪成分; $\epsilon_r = (\sigma_r - \nu \sigma_\theta)/E$, $\epsilon_\theta = (\sigma_\theta - \nu \sigma_r)/E$, $\gamma_{r\theta} = \tau_{r\theta}/G$, (2)

Scheibe の両端で $\sigma_\theta = 0$ を満たす様子 F として次式を採用する。

$$F = \sum_n A(r^\beta + B r^{\beta+1} + C r^{\beta+2} + D r^{\beta+3}) \sin n\theta, \quad \dots (3)$$

ここに $A \sim D$ は積分定数, $\beta = n\pi/\alpha$ で α は箱桁の中心角である。

3. 積分定数の決定 境界条件として直線箱桁の場合と同様の条件、即ち $r = a, b$ で $\sigma_r = 0$ とする。…… (4)

次に有効巾 λ_{ea} , λ_{eb} を次の様に定義する。(図-2 参照)

$$\lambda_{ea} \cdot \sigma_{\theta a} = \int_a^{r_0} \sigma_\theta dr, \quad \lambda_{eb} \cdot \sigma_{\theta b} = \int_b^{r_0} \sigma_\theta dr, \quad \dots (5)$$

ここに r_0 は σ_θ 曲線の半径方向勾配が、その平均勾配を与える点の半径、即ち $\left(\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \frac{\int_a^b \sigma_\theta dr}{b-a} = \frac{\sigma_{\theta b} - \sigma_{\theta a}}{b-a} \dots (6)$

次に上下に λ_{ea} , λ_{eb} なるフラレツ巾に作用する曲げモーメントを $M(\theta) = \sum_n M_n \sin n\theta$ とすると、曲線桁の理論より曲げのみによる直応力 σ_θ は下フラレツ巾について

$$\sigma_\theta = E \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\sum_n M_n \sin n\theta \cdot \frac{1}{r}}{\int_F \frac{1}{r^2} dF} = \frac{1}{r} \frac{\sum_n M_n \sin n\theta}{W(\theta)} \quad \dots (7)$$

ここに $W(\theta) = \frac{2}{r} \int_F \frac{1}{r^2} dF = \frac{h^2 t}{6} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + h d \log \left(\frac{1 + \lambda_{ea}/a}{1 - \lambda_{eb}/b} \right) \div \frac{h^2 t}{6} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + h d \left(\frac{\lambda_{ea}}{a} + \frac{\lambda_{eb}}{b} \right)$.

$r = a, b$ において曲線桁の歪と *Scheibe* の歪 ϵ_θ を等しいとして2つの条件式が得られる。

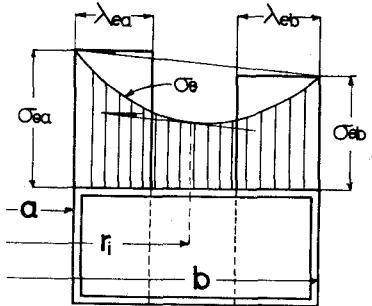
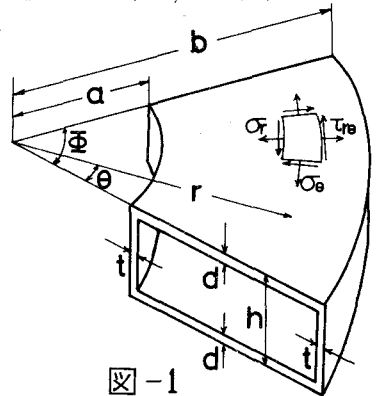
以上の条件より、 $A \sim D$ に関する以下の連立方程式が得られる。即ち

$$(4) \text{ より } A^{\beta-1} \beta(\beta-1) + B A^{\beta-1} \beta(\beta+1) + C A^{\beta-1} \beta(\beta-1)(\beta+2) + D A^{\beta-1} \beta(\beta+1)(\beta-2) = 0, \quad \dots (8)$$

$$B^{\beta-1} \beta(\beta-1) + B B^{\beta-1} \beta(\beta+1) + C B^{\beta-1} \beta(\beta-1)(\beta+2) + D B^{\beta-1} \beta(\beta+1)(\beta-2) = 0, \quad \dots (9)$$

$$(7) \text{ より } (b-a)^{\beta-1} \beta(\beta-1) + B(b-a)^{\beta-1} \beta(\beta+1) + C(b-a)^{\beta-1} \beta(\beta-1)(\beta+2) + D(b-a)^{\beta-1} \beta(\beta+1)(\beta+2) = 0, \quad \dots (10)$$

(5) の両辺を加えて r_0 を消去し、これと (7) より次式が得られる。



$$A\{kd\{(b^{\beta+1}-a^{\beta+1})\beta-B(b^{\beta+1}-a^{\beta+1})\beta+C(b^{\beta+1}-a^{\beta+1})(\beta-2)+D(b^{\beta+1}-a^{\beta+1})(\beta+2)\} \\ + \frac{k^2t}{6}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\{a^{\beta+1}\beta(\beta-1)+B\bar{a}^{\beta+1}\beta(\beta+1)+C\bar{a}^{\beta+1}\beta(\beta-1)(\beta-2)+D\bar{a}^{\beta+1}\beta(\beta+1)(\beta+2)\}\}+Mn=0, \dots (11)$$

(8)~(11) を解けば $A \sim D$ は以下の様になる。ただし $k=a/b$ である。

$$A=HM_n/\bar{H}, \quad B=-b^{2\beta}\beta(\beta-1)(\beta+2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})+(b-2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})/H,$$

$$C=b^{2\beta-2}\beta(\beta+1)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})/H, \quad D=b^{2\beta}\beta(\beta-1)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})/H,$$

$$\therefore H=(\beta+1)[(\beta+2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})+(\beta-2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})],$$

$$\bar{H}=kd\cdot b^{\beta}\beta\{(\beta+1)(1-k^{\beta+1})(\beta+2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})+(\beta-2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1}) \\ +(\beta-1)(1-k^{\beta+1})(\beta+2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})+(\beta-2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1}) \\ +2\beta(1-k^{\beta+1})(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})\}+\frac{k^2t}{6b}(1+k^{\beta+1})\cdot b^{\beta}\beta\cdot 4(\beta^2-1)(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})^2,$$

応力関数 F が決れば (6) の Y_i が決まる。この $Y_i \in Y_i = m_i b$ として (5) を計算すれば、有効巾 λ_{ea} , λ_{eb} は以下の様になる。

$$\frac{\lambda_{ea}}{a} = \frac{\sum (K_i \cdot M_n \sin \beta \theta) / \bar{H}}{\sum (K_3 \cdot M_n \sin \beta \theta) / \bar{H}}, \quad \frac{\lambda_{eb}}{b} = \frac{\sum (K_2 \cdot M_n \sin \beta \theta) / \bar{H}}{\sum (K_3 \cdot M_n \sin \beta \theta) / \bar{H}},$$

$$\therefore K_1=b^{\beta+1}\beta\{(\beta+1)(m_i^{\beta+1}-k^{\beta+1})(\beta+2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})+(\beta-2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1}) \\ +(\beta-1)(m_i^{\beta+1}-k^{\beta+1})(\beta+2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})+(\beta-2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1}) \\ +(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})(\beta+1)(\beta-2)(m_i^{\beta+1}-k^{\beta+1})(1-k^{\beta+1})+(\beta-1)(\beta+2)(m_i^{\beta+1}-k^{\beta+1})(1-k^{\beta+1})\},$$

$$K_2=b^{\beta+1}\beta\{(\beta+1)(1-m_i^{\beta+1})(\beta+2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})+(\beta-2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1}) \\ +(\beta-1)(1-m_i^{\beta+1})(\beta+2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})+(\beta-2)(1-k^{\beta+1})(k^{\beta+1}-k^{\beta+1}) \\ +(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})(\beta+1)(\beta-2)(1-m_i^{\beta+1})(1-k^{\beta+1})+(\beta-1)(\beta+2)(1-m_i^{\beta+1})(1-k^{\beta+1})\},$$

$$K_3=4b^{\beta}\beta(\beta^2-1)(k^{\beta+1}-k^{\beta+1})^2.$$

4. 計算例

下記の如き断面寸法を有する箱桁
についての計算例を示す(図-1参照)。

$$a=40\text{m}, b=44\text{m}, k=\frac{a}{b}=0.9090909,$$

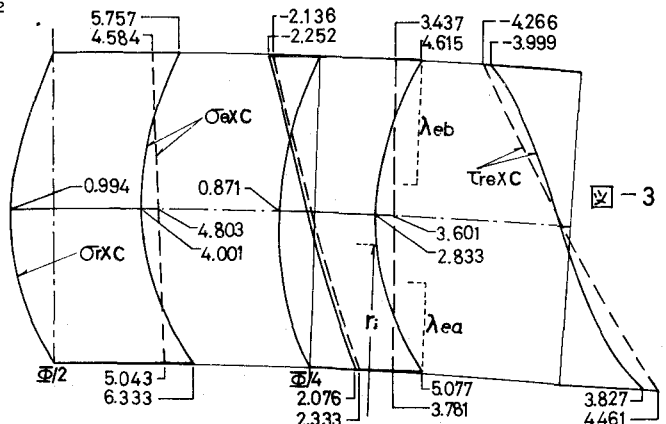
$$d=t=1\text{cm}, \quad k=120\text{cm},$$

$$\Phi=\pi/15 \text{ rad.}$$

又この時のフランジ巾と桁長の比は
0.45 である。

右図は、両側の Web 上に $\frac{P}{2}$ の等分

布線荷重が載荷した場合の曲げによる直応力 σ ,
曲げに伴うせん断応力 τ の Shear 理論(実線)
と曲線桁理論(破線)の比較図である。



$$\frac{\Phi}{2} \tau \begin{cases} \lambda_{ea}/(r_1-a)=0.760 \\ \lambda_{eb}/(b-r_1)=0.793 \end{cases} \quad \frac{\Phi}{4} \tau \begin{cases} \lambda_{ea}/(r_1-a)=0.706 \\ \lambda_{eb}/(b-r_1)=0.734 \end{cases}$$

$c = \frac{t^2 \Phi}{Pb(1+K^2)} \times 10^5$
 — Shear Theory
 --- Curved Beam Theory

5. 結語 今回は対称問題の場合の有効巾の概念を拡張し(式(5), (6)), 境界条件として式(4)を与え、図-3に見る様な結果を得たが、境界条件は最も実状に即したものを与えるべきであるから、十分論議の余地があり、さらにフランジプレートと載荷の問題についても現在研究中である。

文献; 伊藤孝 箱桁のフランジの有効巾について(第3回日本道路会議論文集), 倉西正嗣 弾性学 P.358