

室蘭工業大学 正員 能野純雄

○学生員 吉田、純一

1. 緒言

細長い矩形板要素の短辺方向で各歪を直線分布とする変位せん断方程式を用いて、断面変形も考慮した箱桁構造物を解くことが出来るが、これと同じ手法で断面変形も考慮した曲線箱桁も解こうとするものである。まず曲線帯板と、扇形帯板の変位せん断方程式を誘導し、断面変形抵抗はラーメン作用としてとらえる。1頂点における3変位と1回転角の計16変位をその各頂点の力のつりあいによって関係づけ16個の方程式が得られる。

2. 曲線帯板の変位せん断方程式、

図-1のように r, θ, z をとりそれぞれの方向の変位を u, v, w とし、又法線方向力を N_r, N_θ, N_z せん断力を $N_{\theta z}, Q_\theta$ とすると

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{N_\theta}{r} = 0, \quad (1) \quad \frac{N_\theta}{r} + \frac{\partial N_{\theta z}}{\partial z} - \frac{Q_\theta}{r} = 0, \quad (2) \quad Q_\theta' + N_\theta = 0, \quad (3)$$

$$(2)(3)より Q_\theta \text{ を消去すると } \frac{\partial}{\partial z} N_{\theta z} = -\frac{1}{r} N_\theta - \frac{1}{r} N_\theta \quad (4) \quad \text{但し } N = \frac{\partial N}{\partial \theta}$$

A, B 両端の変位をそれぞれ $u_A, u_B, v_A, v_B, w_A, w_B$ とし、 v については平面仮定も、 u, w については直線分布を仮定すると、

$$u = u_B \frac{z}{h} - u_A \frac{h-z}{h}, \quad v = v_B \frac{z}{h} - v_A \frac{h-z}{h}, \quad w = w_B \frac{z}{h} - w_A \frac{h-z}{h},$$

$$\theta \text{ 方向の歪を } \epsilon_\theta \text{ とし } A, B \text{ 端で } \epsilon_A, \epsilon_B \text{ とすると } \epsilon_\theta = \frac{v}{r} + \frac{u}{r} = \epsilon_B \frac{z}{h} + \epsilon_A \frac{h-z}{h}, \quad (5)$$

$$z \text{ 方向の歪を } \epsilon_z \text{ とすると } \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = (w_B - w_A)/h, \quad (6)$$

$$\text{また } N_\theta = \frac{E\alpha}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_z), \quad (7) \quad N_{\theta z} = G\alpha \left(w' + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (8) \quad N_z = \frac{E\alpha}{1-\nu^2} (\epsilon_z + \nu \epsilon_\theta) \quad (9)$$

(7) を (4) に代入し $z=0$ で $N_{\theta z} = T_{AB}'$, $z=h$ で $N_{\theta z} = -T_{BA}'$ を考慮して積分し (10), (11) をうる、

$$N_{\theta z}' = -\frac{E\alpha}{1-\nu^2} \frac{1}{r} \left[\epsilon_B'' \frac{z^2}{2h} + \epsilon_A'' \frac{2hz-z^2}{2h} + \epsilon_B \frac{z^2}{2h} + \epsilon_A \frac{2hz-z^2}{2h} + \nu (\epsilon_z'' + \epsilon_z) z \right] + T_{AB}', \quad (10)$$

$$T_{AB}' + T_{BA}' = \frac{E\alpha h}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{r} \left[\epsilon_B'' + \epsilon_A'' + \epsilon_B + \epsilon_A + 2\nu (\epsilon_z'' + \epsilon_z) h \right], \quad (11)$$

(1) に (10) を代入し $z=0$ で $N_z = S_{AB}$, $z=h$ で $N_z = S_{BA}$ を考え (12), さらに (11), (12) より (13) をうる。

$$\frac{T_{AB}'}{r} = \frac{E\alpha h}{6(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \left[2\epsilon_A'' + \epsilon_B'' + 2\epsilon_A + \epsilon_B + 3\nu (\epsilon_z'' + \epsilon_z) \right] + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{h}, \quad (12)$$

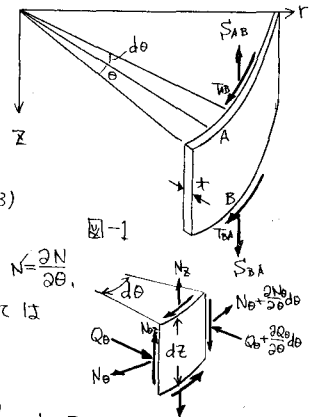
$$\frac{T_{BA}'}{r} = \frac{E\alpha h}{6(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \left[2\epsilon_B'' + \epsilon_A'' + 2\epsilon_B + \epsilon_A + 3\nu (\epsilon_z'' + \epsilon_z) \right] + \frac{S_{BA} - S_{AB}}{h}, \quad (13)$$

(8) を (1) に代入して変位と S の関係を得る。

$$S_{BA} - S_{AB} = -G\alpha h \left[\frac{1}{2r^2} (w_B' + w_A') - \frac{u_B - u_A}{r h} + \frac{\epsilon_B - \epsilon_A}{h} \right], \quad (14)$$

(9) に (5), (6) を用いて $S_{AB} + S_{BA}$ を作ると

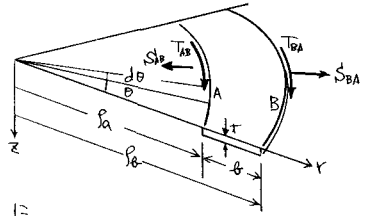
$$S_{AB} + S_{BA} = \frac{E\alpha}{1-\nu^2} \left[\frac{w_B - w_A}{h} + \nu (\epsilon_A + \epsilon_B) \right], \quad (15)$$



3. 扇形帯板の変位せん断方程式.

座標を図-2のようにとり, r, θ 方向変位を u, v とする.
法線方向力を N_r, N_θ , せん断力を $N_{r\theta}$ とすると, 力のつり合は

$$N_\theta + \frac{\partial(r^2 N_{r\theta})}{r \partial r} = 0 \quad (16) \quad \frac{\partial(r N_r)}{\partial r} + N_{r\theta}' - N_\theta = 0 \quad (17)$$

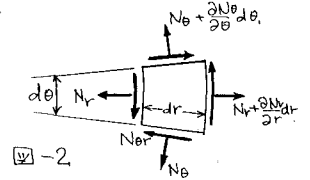


A, B 端の u, v を u_A, u_B, v_A, v_B とし, r 方向の分布を次のように

$$\text{仮定する. } v = v_B \frac{r-r_A}{r_B-r_A} + v_A \frac{r_A-r}{r_A-r}, \quad (18) \quad u = u_B \frac{r-r_A}{r_B-r_A} + u_A \frac{r_A-r}{r_A-r}, \quad (19)$$

$$\theta \text{ 方向歪を } \epsilon_\theta \text{ とすると } \epsilon_\theta = \frac{v}{r} + \frac{u}{r} = \epsilon_B \frac{r-r_A}{r} + \epsilon_A \frac{r_A-r}{r}, \quad (20)$$

$$\text{また } N_\theta = \frac{E t}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \frac{\partial u}{\partial r}), \quad (21) \quad N_{r\theta} = G t \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad (22)$$



(21) を (16) に代入し $r = r_A$ で $N_{r\theta} = T_{AB}$, $r = r_B$ で $N_{r\theta} = -T_{BA}$ を考慮して (23), (24) を得る.

$$r^2 N_{r\theta} = - \frac{E t}{1-\nu^2} \frac{1}{\partial \theta} \left[\epsilon_B' \left\{ 2(r^2 - r_A^2) - 3r_A(r^2 - r_A^2) \right\} + \epsilon_A' \left\{ 3r_B(r^2 - r_A^2) - 2(r^2 - r_A^2) \right\} \right. \\ \left. + \nu \left\{ u_B \frac{4(r^2 - r_A^2) - 3r_A(r^2 - r_A^2)}{r_B} + u_A \frac{3r_B(r^2 - r_A^2) - 4(r^2 - r_A^2)}{r_A} \right\} \right] + r_A^2 T_{AB}, \quad (23)$$

$$r_A^2 T_{AB} + r_B^2 T_{BA} = \frac{E t}{1-\nu^2} \frac{1}{\partial \theta} \left[\epsilon_B' \cdot \theta^2 (2r_B + r_A) + \epsilon_A' \cdot \theta^2 (r_B + 2r_A) + \nu \left\{ \frac{u_B}{r_B} \theta (4r_B^2 + r_B r_A + r_A^2) - \frac{u_A}{r_A} \theta (4r_A^2 + r_B r_A + r_B^2) \right\} \right], \quad (24)$$

(17) に (21), (23) を代入し, $r = r_A$ で $N_r = S_{AB}$, $r = r_B$ で $N_r = S_{BA}$ を考慮し (25), (26) を用いると,

$$r_A T_{AB}' = \frac{E t \theta}{\partial (1-\nu)} \left[2\epsilon_A' + \epsilon_B'' + \nu \left\{ u_B' (3 - \frac{\theta}{r_B}) - u_A' (3 - \frac{\theta}{r_A}) \right\} \frac{1}{\theta} \right] + \frac{E t}{1-\nu^2} \frac{r_B}{\theta} \left[\frac{h}{2} (\epsilon_A + \epsilon_B) + \nu (u_B - u_A) \right] \\ + \frac{r_B}{\theta} (r_A S_{AB} - r_B S_{BA}), \quad (25)$$

$$r_B T_{BA}' = \frac{E t \theta}{\partial (1-\nu)} \left[2\epsilon_B' + \epsilon_A'' + \nu \left\{ u_B' (3 + \frac{\theta}{r_B}) - u_A' (3 + \frac{\theta}{r_A}) \right\} \frac{1}{\theta} \right] - \frac{E t}{1-\nu^2} \frac{r_A}{\theta} \left[\frac{h}{2} (\epsilon_A + \epsilon_B) + \nu (u_B - u_A) \right] \\ + \frac{r_A}{\theta} (r_B S_{BA} - r_A S_{AB}), \quad (26)$$

(22) および (21) を (17) 式に代入し r_A から r_B まで積分すると,

$$r_B S_{BA} - r_A S_{AB} = -G t \left[\frac{\theta}{2} \left(\frac{u_B}{r_B} + \frac{u_A}{r_A} \right) + \frac{r_A + r_B}{2} (\epsilon_B - \epsilon_A - \frac{u_B}{r_B} + \frac{u_A}{r_A}) \right] + \frac{E t}{1-\nu^2} \left[\frac{\theta}{2} (\epsilon_B + \epsilon_A) + \nu (u_B - u_A) \right], \quad (27)$$

また $N_r = \frac{E t}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \epsilon_\theta \right]$ に (19), (20) を用いて $r_A S_{AB} + r_B S_{BA}$ を作ると,

$$r_A S_{AB} + r_B S_{BA} = \frac{E t}{1-\nu^2} \left[\left(u_B \frac{r_A^2 + r_B^2 + r_B \theta}{r_B} - u_A \frac{r_A^2 + r_B^2 - r_A \theta}{r_A} \right) \frac{1}{\theta} + \nu (r_A \epsilon_A + r_B \epsilon_B) \right], \quad (28)$$

4. 断面形の不变の場合について (H 形断面).

開断面の場合について断面を不变として従来の一般式との比較も H 形断面について行なう.

ここで考える断面を図-3のように A B 軸に対称な断面とし

$$\frac{N_A}{r_A^3} = \frac{N_B}{r_B^3} \text{ なる断面とする.}$$

N_{AB}, N_A, N_B はそれぞれ帯板 AB, AC および AD,

BE および BF の $E t \theta$, $E t h$ とする.

ただし θ は各帯板の部材厚とする.

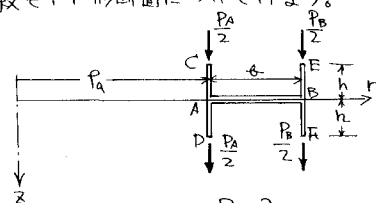


図-3.

断面変形がない故に $u_A = u_B$, $u_C = u_E$, $u_D = u_F$, $w_C = w_A = w_D$, $w_E = w_B = w_F$ となる。

各点でのせん断力のつり合は $T_{CB} + T_{AC} + T_{CD} = 0$, $T_{BA} + T_{BE} + T_{BF} = 0$, $T_{CA} = T_{BA} = T_{EB} = T_{BF} = 0$,

AB部材については(25)(26)を用い, その他の部材については(12)(13)式を用いる。A点でのSのつりあいは図-4に示すように $S_{AC} - S_{AD} - X_{AB} = 0$, 同様にB点において $S_{BE} - S_{BF} + X_{BA} = 0$.

断面の対称性より $\epsilon_A = \epsilon_B = 0$, $\epsilon_C = -\epsilon_D$, $\epsilon_E = -\epsilon_F$

結局せん断力のつり合式より(29)(30)が導かれる。

$$\frac{2}{3} N_A (\epsilon_C'' + \epsilon_E'') = \frac{P_A^2}{h} (P_A + X_{AB}), \quad (29)$$

$$\frac{2}{3} N_B (\epsilon_E'' + \epsilon_E'') = \frac{P_B^2}{h} (P_B - X_{BA}), \quad (30)$$

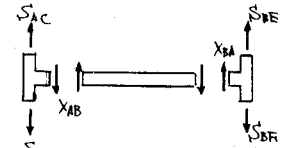


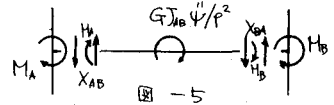
図-4

次に部材CAD, EBFのNoによる軸方向トルクを考えると, CD部材ではA点でトルクをとると,

$$M_{TA} = \int_A^h \frac{N_D}{P} z dz = -\frac{2}{3} \frac{h}{P_A} N_A \cdot \epsilon_C \quad (31), \text{ 同様にEBF部材では } M_{TB} = -\frac{2}{3} \frac{h}{P_B} N_B \epsilon_E, \quad (32)$$

Xについて, 図-5のようにトルクおよびXをとると

$$M_A = M_{TA} + G J_A \psi'' / \rho^2, \quad (32) \quad M_B = M_{TB} + G J_B \psi'' / \rho^2 \quad (33)$$



ただし $\psi = \phi - w/P$, ϕ : 断面回転角, $\rho = \frac{P_A + P_B}{2}$, J : St. Venantの捩り係数。

B点, A点でモーメントをとって,

$$X_{AB} = -\frac{P}{P_A} \left\{ -\frac{h}{3} \left(\frac{N_A}{P_A} + \frac{N_B}{P_B} \right) (\epsilon_C + \epsilon_E) + G J_A \frac{\psi''}{\rho^2} + G J_B \frac{\psi''}{\rho^2} + G J_B \frac{\psi''}{\rho^2} \right\} \quad (34)$$

$$X_{BA} = -\frac{P}{P_B} \left\{ -\frac{h}{3} \left(\frac{N_A}{P_A} + \frac{N_B}{P_B} \right) (\epsilon_C + \epsilon_E) + G J_A \frac{\psi''}{\rho^2} + G J_B \frac{\psi''}{\rho^2} + G J_A \frac{\psi''}{\rho^2} \right\} \quad (35)$$

変位については, せん断変形がないとすると(14), (27)の左辺を0として

$$P_A \epsilon_C = \dot{w}_A \frac{h}{\rho} + \phi h, \quad (36), \quad P_B \epsilon_E = \dot{w}_B \frac{h}{\rho} + \phi h \quad (37)$$

よって $\epsilon_C + \epsilon_E = 2 \left(\frac{\dot{w}}{\rho} h + \phi h \right)$, (38), 但し $w = \frac{w_A + w_B}{2}$, $w_A - w_B = \phi h$ とする,

(29)(30) 式より $P_A \epsilon_C + P_B \epsilon_E$ を作り微分項を無視し(38)を代入する, $\frac{1}{P} EI = \left(\frac{N_A}{P_A} + \frac{N_B}{P_B} \right) \frac{h^2}{3}$,

$$EI (\dot{w}'' + \rho \phi'' + \dot{w}' + \rho \phi') = \rho^3 g + \rho^3 \eta, \quad (39),$$

ただし $g = P_A + P_B$, $\eta = (P_B - P_A) \frac{\phi}{2}$,

(29)(30) により(2)式の Q_0 により入ってくる項を無視し $P_B - P_A$ を作り, 断面定数として

$$\frac{1}{\rho^3} EC_w = \left(\frac{N_A}{P_A^2} + \frac{N_B}{P_B^2} \right) \frac{h^2 \rho^2}{3}, \quad (C_w: \text{曲げねじれ定数}), \quad \frac{J_T}{\rho^2} = \frac{J_{AB}}{\rho^2} + \frac{J_A}{P_A^2} + \frac{J_B}{P_B^2},$$

またXは微分項を無視すると $X_{AB} + X_{BA} = \frac{EI}{P^2 \rho} \left(\frac{\dot{w}}{\rho} + \phi \right) - \frac{1}{P^2 \rho} G J_T \psi''$,

$$\text{結局, } -EI C_w \left(\dot{w}''' - \frac{1}{\rho^2} \phi''' \right) + EI (\dot{w}'' + \rho \phi'') - G J_T (\rho \phi'' - \dot{w}'') = \rho^3 \eta \quad (40)$$

(39), (40)は梁沢泰晴氏の式と一致する。

5 箱桁への適用

断面を図-6のようにとり, 各点で, せん断力, 水平方向力

鉛直方向力, モーメントのつり合をとる。

せん断力のつりあい $T_2 + T_4 = 0$, $T_{21} + T_{23} = 0$, $T_{32} + T_{34} = 0$, $T_{43} + T_{41} = 0$. (41)

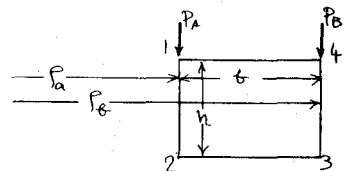


図-6.

水平方向力のつりあい

$$S_{14} - X_{12} = 0, S_{23} - X_{21} = 0, S_{32} - X_{31} = 0, S_{41} - X_{43} = 0, \quad (42)$$

鉛直方向力のつりあい

$$S_{12} + X_{14} + P_A = 0, S_{21} - X_{23} = 0, S_{34} + X_{32} = 0, S_{43} - X_{41} + P_B = 0, \quad (43)$$

モーメントのつりあい

$$M_{14} + M_{12} = 0, M_{21} + M_{23} = 0, M_{32} + M_{34} = 0, M_{43} + M_{41} = 0 \quad (44)$$

せん断力のつりあいは (12), (13) および (25), (26) に (14), (27) を用いて

S を消去し, (41) に代入する。水平方向力のつりあひ式の S は (27), (28) を用いる。

水平方向の X は $\frac{N_0}{P}$ の分布を荷重と考えて図-8 のごとくすると。

$$X_{AB} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{h} + \frac{1}{P} \frac{E\pi}{1-\nu^2} \left[\epsilon_B \frac{h}{3} + \epsilon_A \frac{h}{6} + \nu \frac{\epsilon_2}{2} h \right] \quad (45)$$

$$X_{BA} = -\frac{M_{BA} + M_{AB}}{h} - \frac{1}{P} \frac{E\pi}{1-\nu^2} \left[\epsilon_A \frac{h}{3} + \epsilon_B \frac{h}{6} + \nu \frac{\epsilon_2}{2} h \right] \quad (46)$$

鉛直方向力のつりあひ式で S は (14), (15) を用いる, X は

$$B \text{ 点でモーメントをとると } X_{AB} = -\frac{1}{\epsilon} (M_{AB} + M_{BA} \frac{P_B}{P_A}), \quad (47)$$

$$A \text{ 点でモーメントをとると } X_{BA} = -\frac{1}{\epsilon} (M_{BA} + M_{AB} \frac{P_B}{P_A}), \quad (48)$$

モーメントはラーメンの捷み角公式を用いて

水平部材では

$$M_{14} = 2EK_{14} \{ 2\theta_1 + \theta_4 + 3(w_1 - w_4)/\epsilon \}$$

$$M_{41} = 2EK_{14} \{ 2\theta_4 + \theta_1 + 3(w_1 - w_4)/\epsilon \}$$

鉛直部材では

$$M_{12} = 2EK_{12} \{ 2\theta_1 + \theta_2 - 3(u_1 - u_2)/h \}$$

$$M_{21} = 2EK_{12} \{ 2\theta_2 + \theta_1 - 3(u_1 - u_2)/h \}$$

$$\text{但し } K = \frac{E\pi^3}{12(1-\nu^2)\epsilon^2}$$

以上式 (40) ~ (44) の計 16 個の方程式において各頂点の未知数 ϵ, u, w , θ および荷重 P_A, P_B をフーリエ級数に展開し, 16 元の連立方程式を解くことによって各未知数を求めることができる。

図-10 ~ 図-12 に計算例を示す。フーリエ級数は 10 項までとり, 計算に用いる数値は下記のごとくである。

$E = 200000 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.2, \text{ 支間 } l = 30 \text{ m}, \text{ 曲率半径 } \rho = 30 \text{ m}$

$h = \epsilon = 1.5 \text{ m}, \text{ 部材厚 } t = 10.0 \text{ cm}, \text{ 荷重 } P_A = P_B = 1 \text{ (集中荷重, 荷重は支間中央)}$

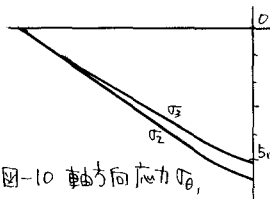
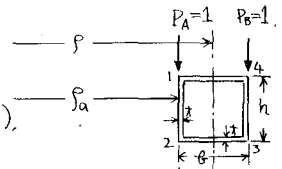


図-10 軸方向応力 σ_0

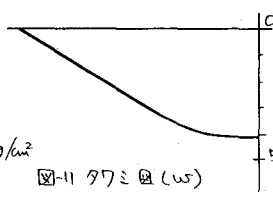


図-11 ねじり角 (ω)

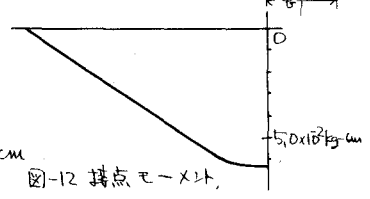


図-12 接点モーメント

参考文献

- 1) 能所, 尾崎, 杉野: 「断面変形を考えた=室箱桁の応力解析について」, 研究報告論文集第24号, 1968年, 土木学会北海道支部
- 2) 梁沢: 「薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論」, 土木学会論文集第110号, 1964年。