I−70

漸化変形法によるラーメンの解析

信州大学　学生員　○小川泰造　　正員　谷本勉之助

1. 漸化変形法について

漸化変形法は，昭和42年度中部支部研究発表会で報告された“演算子法による変形法の考察”に思想の根拠を置いている.*) 本法は解析の出発点を一般変位と一般力とに置き，これらを列ベクトルで表わし一般力を節点変位に換算する. 節点における釣合い条件をマトリクス形式で整理して，節点変位を未知量とした漸化式を得る. これらの釣合式を集めると平面系においては二重，立体系においては三重の三軸マトリクスになる. 大型の電子計算機によればこれらの三軸マトリクスは一度に求められるが，小型のものならば漸化処理によって演算可能である. 以下，解析の手順を平面ラーメンについて述べることにする.

2. 基本式について

平面ラーメンにおいて，物理量を図−1 のようにとった場合，部材力は材端変位によって次のように与えられる:

$$\begin{bmatrix} F \\ S \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & 2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & -\gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ell & \frac{2}{3}\ell & \frac{1}{3}\ell & 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}, \tag{1}$$

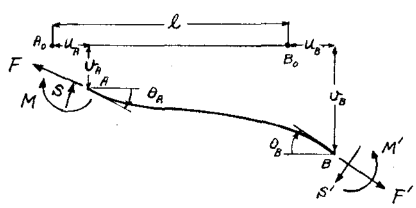
$$\begin{bmatrix} F \\ S \\ M \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma \\ 0 & -\gamma & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell & -\frac{1}{3}\ell & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}. \tag{2}$$

ここに　$\alpha = EA/\ell$，$\beta = 12EI/\ell^3$，$\gamma = 6EI/\ell^2$，$\delta = 2EI/\ell$，　E = 弾性係数，A = 部材断面積，ℓ = 部材の長さ，I = 断面二次モーメント，$\mathbf{K}$ = 荷重マトリクスである.

式 1, 2 を簡単にして

$$\mathbf{V} = \lfloor \boldsymbol{m} \ \ \boldsymbol{n} \rfloor \{ \mathbf{U} \ \ \mathbf{U}' \} + \boldsymbol{g}\mathbf{K}, \tag{3}$$

$$\mathbf{V}' = \lfloor \boldsymbol{m}' \ \ \boldsymbol{n}' \rfloor \{ \mathbf{U} \ \ \mathbf{U}' \} + \boldsymbol{g}'\mathbf{K}. \tag{4}$$



図−1. 構成部材の物理量(材端).

3. 釣合い条件式

図−2のような平面ラーメンを考える，
釣合い条件式は任意節点(r, s)においては部材端力によって次のようになる:

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{V}_{r-1,2s} + \mathbf{R}_2 \mathbf{V}_{r,2s-1} - \mathbf{R}_1 \mathbf{V}'_{r-1,2s-2} - \mathbf{R}_2 \mathbf{V}'_{r-1,2s-1} = 0, \tag{5}$$

ここに　$\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ は変換マトリクスで各部材の一般力と一般変位の全体座標系への射影子である.

式3,4を式5に代入することにより次式を得る:

$$a_{rs} D_{r-1,s} + \lfloor b \quad c \quad d \rfloor_{rs} \begin{bmatrix} D_{s-1} \\ D_s \\ D_{s+1} \end{bmatrix}_r + e_{rs} D_{r+1,s} + \lfloor f \quad i \quad j \rfloor_{rs} \begin{bmatrix} K_{2s-2} \\ K_{2s-1} \\ K_{2s} \end{bmatrix}_{r-1} + k_{rs} K_{r,2s-1} = 0. \qquad (6)$$

4. 漸化式

式6で与えられる節点釣合い式を考えている層について水平方向に集積すると，オ一の三軸マトリクスを得，各層の節点変位 $[D]_{r-1}$, $[D]_r$, $[D]_{r+1}$ の间に次のような漸化式を得る:

$$A_r[D]_{r-1} + B_r[D]_r + C_r[D]_{r+1} + P_r = 0. \qquad (7)$$

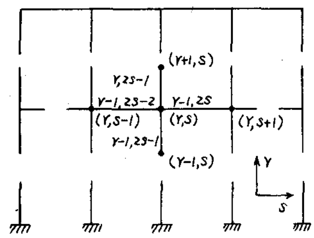


図-2. 部材と節点の番号

ここに A_{r-1}, B_r, C_{r+1} は $3\times$(柱の本数)次の演算マトリクスで，P_r は荷重の影響を導入するための補給演算子で，その次数は$[D]$と等しい。漸化式8によって最下層の節点変位 $[D]_1$ を系全体に流通させ，頂部層での釣合い式によってその値を決定する。以下に計算例を示す。

5. 計算例

	節点のたわみ角 (10^{-4})			節点の鉛直変位 $(10^{-3}m)$		
鉛直＼水平	1	2	3	1	2	3
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	15.531	−14.920	−0.552	4.110	3.780	0.110
3	10.850	−15.334	−4.564	7.654	6.973	0.230
4	9.661	−18.112	−7.504	10.620	9.609	0.342
5	8.135	−19.879	−9.967	12.999	11.705	0.439
6	7.620	−21.664	−11.758	14.785	13.275	0.512
7	4.099	−20.493	−12.840	15.972	14.328	0.558
8	22.257	−31.632	−13.370	16.554	14.880	0.566

但し $E = 2.1\times10^6\ t/m^2$, $A = 0.6\times0.6 = 0.36\ m^2$, $\ell = 6m$ である。

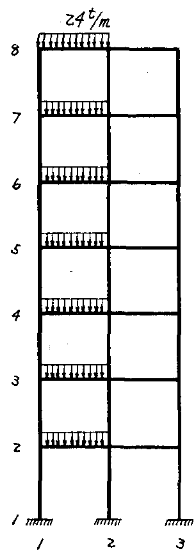


図-3. 7層2径间ラーメン

6. 一般考察

本報告は平面ラーメンについての解析手順を述べたが，漸化変形法は立体ラーメン，*格子，トラスの各系に関しても殆んど同様な手順で適用することができる。漸化処理に伴う累積誤差は演算桁数を多くとることにより解決され，殆んど影響がないことが確認されている。

---

*) 吉沢孝和，谷本勉之助 "演算子法による変形法の考察"（土木学会中部支部 研究発表会講演概要集 1967年11月）