I－68　**演算子法による構造解析**

信州大学　正員　○吉澤孝和　　正員　谷本勉之助

1. 演算子法について

一般に，構造物は，一定の幾何図形を有する単位構(unit)の結合によって構成されるものと考えることができる．本法はこの点に着目して，単位構同士の力学条件をマトリクス演算子を用いて解析していく方法である．　単位構の力学性状を示すのに，剛節構造物においては各部材の基礎微分方程式の一般解を用い，滑節構造物においては部材力と節点変位とを用いている．そしてこれらを単位構の固有マトリクス(eigenmatrix)と名付ける．単位構と単位構との結合条件はそれらの間の適合条件と平衡条件とを考えることによって満足される．これをマトリクス形式にまとめて処理すると，これら2つの単位構(r)および(r−1)の固有マトリクスの関係を次のような漸化式に仕組むことができる：

$$\boldsymbol{X}_r = \boldsymbol{L}_r \boldsymbol{X}_{r-1} + \boldsymbol{P}_r \boldsymbol{K}_{r-1}. \tag{1}$$

ここに，$\boldsymbol{X}_r, \boldsymbol{X}_{r-1}$ = 固有マトリクス，$\boldsymbol{L}_r$ = 移行演算子(shift operator)，$\boldsymbol{P}_r$ = 補給演算子(feed operator)，$\boldsymbol{K}_{r-1}$ = 荷重マトリクス(load matrix)である．

演算子 $\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{P}$ により基準となる単位構の固有マトリクスを系全体に流通させ，しかるのち，所定の境界条件によりその値を決定する．これを代数学的にみるならば，マトリクス演算子の単なる内積計算のくりかえしであり，最後の段階で流通したマトリクスの値を決定するための逆マトリクス計算が介入するだけのことである．以上が本法の概要で，以下剛節構造物を主体とした系について述べる．

2. 連続ばり

はりの物理量 〜 たわみ w，たわみ角 θ，曲げモーメント M，せん断力 S 〜 を次式であらわす：

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{6EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ 0 & 1 & 2\rho & 3\rho^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3\rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\boldsymbol{N} + \boldsymbol{K}]. \tag{2}$$

ここに L = はりの長さ，EI = 曲げこわさ，$\rho = x/L$ = 無次元流通座標，$\boldsymbol{K}$ = 荷重マトリクス，$\boldsymbol{N} = \{A \quad B \quad C \quad D\}$ = 固有マトリクスである．

連続ばりにおいては各々の径間が unit を構成している．中間支点においてそこの支持状態に応ずる適合条件とつり合い条件とを処理すると，左右両径間の固有マトリクスが式(1)のような関係で結ばれる．また，連続ばりの左右両端の境界条件は，境界マトリクス $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}'$ を用いて

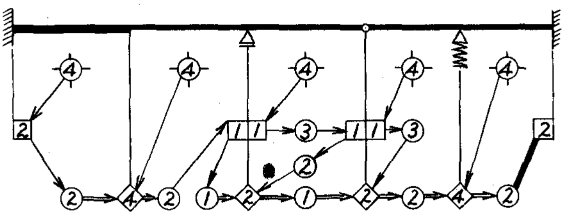
$$\text{左端；}\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1 = 0, \tag{3}$$

$$\text{右端；}\quad \boldsymbol{B}'[\boldsymbol{X} + \boldsymbol{K}]_n = 0, \quad (n = \text{径間数}) \tag{4}$$

で与えられる．漸化式(1)を用いて任意の径間の固有マトリクスを系全体に流通させ，(3)，(4)によってその値を決定する．たとえば，左端の第1径間を基準に選んだ時の解は次のようである：

$$\boldsymbol{X}_1=-\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}'\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{L}_{n-1}\cdots\boldsymbol{L}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{B}'[\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{L}_{n-1}\cdots\boldsymbol{L}_3\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{P}_{n-1},\boldsymbol{P}_n,\boldsymbol{E}]\end{bmatrix}\{\boldsymbol{K}_1,\cdots,\boldsymbol{K}_{n-2},\boldsymbol{K}_{n-1},\boldsymbol{K}_n\}. \qquad (5)$$

手計算による場合は，左右の境界条件の処理を個々に行ない，最終段階で必要とされる逆マトリクスの次数が2次となるように進めるのがよい．その例を図−1に示す．⌖，○，□，◇の中の数字はそれぞれ，固有マトリクスの初期の次数，条件式処理で低減された次数，各径間で独立に与えうる境界条件の数，左右両径間の結合条件式の数を示す．また ⟹ は移行の方向を示す．



図−1．連続ばりの移行チャート．

3. ラーメン，格子

これらの系では，上述のはりの物理量に追加して，ラーメンでは軸方向変位 u と軸力 F を，格子ではねじれ角 ϕ とねじり T とを考える．従って固有マトリクスは $\boldsymbol{X}=\{ABCDEF\}$ なる6次の形をとることになる．荷重マトリクスもこれに順ずる．各々の基本式は次のようである：

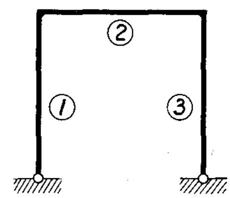
$$\text{ラーメン：}\quad\begin{bmatrix}u\\ w\\ \theta\\ F\\ S\\ M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{L}{EA}&0&0&0&0&0\\ 0&\frac{L^3}{6EI}&0&0&0&0\\ 0&0&\frac{L^2}{6EI}&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&-\frac{L}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\rho&0&0&0&0\\ 0&0&1&\rho&\rho^2&\rho^3\\ 0&0&0&1&2\rho&3\rho^2\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&3\rho\end{bmatrix}[\boldsymbol{X}+\boldsymbol{K}]. \qquad (6)$$

$$\text{格　子：}\quad\begin{bmatrix}\phi\\ \theta\\ w\\ M\\ T\\ S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{L^2}{GJ}&0&0&0&0&0\\ 0&\frac{L^2}{6EI}&0&0&0&0\\ 0&0&\frac{L^3}{6EI}&0&0&0\\ 0&0&0&-\frac{L}{3}&0&0\\ 0&0&0&0&L&0\\ 0&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\rho&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&2\rho&3\rho^2\\ 0&0&1&\rho&\rho^2&\rho^3\\ 0&0&0&0&1&3\rho\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}[\boldsymbol{X}+\boldsymbol{K}]. \qquad (7)$$

(6),(7)の基本式から出発して，ここでも，単位構同士の間に式(1)で与えられるような移行公式が誘導される．応用例として，図−2のような門型ラーメンの解を式(8)に示した．ここに，各部材の材質 E，図形量 A, I, L はすべて等しいものとした．また $AL^2/6I=1000$ とおいている．解は紙面の都合上 $\boldsymbol{X}_1$ に関するもののみを示した．$\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K}_3$ はそれぞれ，部材1,2,3の荷重項である．荷重条件に応ずるこれらの値を式(8)のように後掛けして $\boldsymbol{X}_1$ の値が得られる．

$$
\boldsymbol{X}_1 = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & -0.3334 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0 & -0.6 & -1 & -1.4659 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & -0.2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & -0.3334 & -1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0006 & -2.0023 & -1 & -0.4001 & -0.0674 & -0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.5 & 0 & -0.1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \right.
$$

$$
\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3334 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.001 & 0 & 0.6 & 0 & -0.8672 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 \\ \boldsymbol{K}_2 \\ \boldsymbol{K}_3 \end{bmatrix} \qquad (8)
$$



図－2. 門型ラーメン.

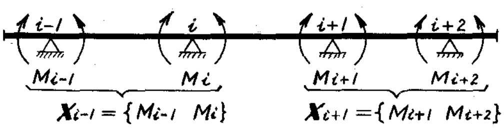
式(8)はこの系の解が

$$
\{\boldsymbol{X}_1 \ \boldsymbol{X}_2 \ \boldsymbol{X}_3\} = [\boldsymbol{G}]\{\boldsymbol{K}_1 \ \boldsymbol{K}_2 \ \boldsymbol{K}_3\} \qquad (9)
$$

の形であらわされることを示している．[**G**]はこの場合，18次の正方マトリクスで，荷重条件とは無関係に，考えている系の材質および幾何図形的要素のみから定められるものである．よってこれを図形マトリクス（geometry matrix）と呼んでいる．これが得られると，あらゆる荷重状態に対する力学量を即座に求めることができる．各種の影響線なども数式的にあらわすことができる．

4. 在来理論への応用

演算子法の手法は，在来の解析理論にもそのまま応用できる．



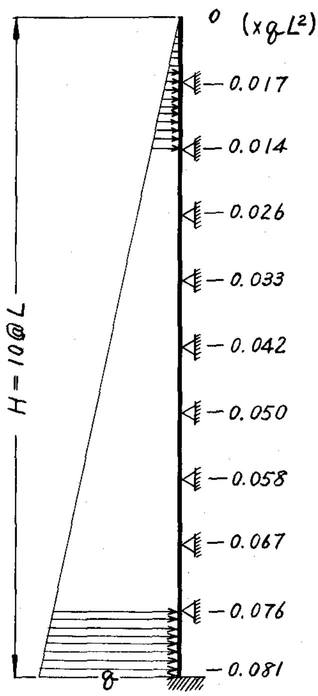
図－3. 連続ばりの支点モーメント.

4.1. 三連モーメント式

連続ばりの支点モーメントを図－3に示すように，隣り合う2個ずつを組み合わせて1つのunitと考える．この基準にもとづいて，支点i，$i+1$に関する三連モーメント式の2本をマトリクス形式で整理して

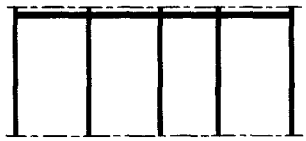
$$
\boldsymbol{X}_{i+1} = \boldsymbol{L}_i \boldsymbol{X}_{i-1} + \boldsymbol{Q}_i \qquad (10)
$$

なる漸化式を得る．　実算例を静水圧荷重を受ける図－4のような矢板について示した．中間支点はいずれも剛支承と考えている．移行演算は底部から上方に向けて行なっている．



図－4. 矢板の支点モーメント.

4.2. たわみ角式



図－5. ラーメンの単位構.

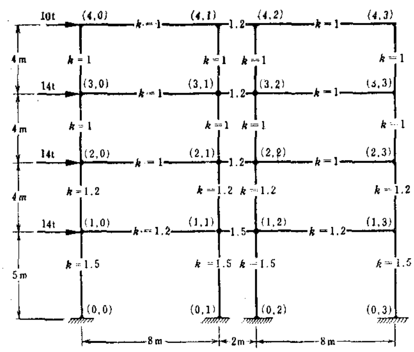
多層多階のラーメンをたわみ角式で解くような場合には，単位構を図－5のようにとり，その中に含まれるたわみ角と部材角とを列ベクトルにまとめて未知量 $\boldsymbol{X}$ とする．この場合の漸化式は3つの単位にまたがり，

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{L}_{i-2}\boldsymbol{X}_{i-2} + \boldsymbol{M}_{i-1}\boldsymbol{X}_{i-1} + \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{K}_{i-1} \qquad (11)$$

の形をとる．これを用いて最下層の $\boldsymbol{X}_1$ を系全体に流通させ，最後に頂部の節点におけるモーメントのつり合い式群によってその値を決定する．このような計算の処理は表の上で簡単に進めることができる．計算例を図－6のような系について示した．その結果は表－1のようである．Aは演算子法によるもの，Bはイテラチオン6回によるものである．両者の値を各々の節点および層のつり合い条件式に代入して検算を試みた結果は表－2のようである．M.はモーメントつり合い式を，S.はせん断力つり合い式を示す．

表－1. ラーメンの解.

未知量	A	B
φ_{10}	10.27	10.20
φ_{11}	6.38	6.35
ψ_1	−34.16	−34.05
φ_{20}	8.11	8.10
φ_{21}	5.56	5.53
ψ_2	−38.57	−38.40
φ_{30}	4.70	4.71
φ_{31}	3.12	3.12
ψ_3	−28.18	−28.20
φ_{40}	1.82	1.83
φ_{41}	1.02	1.07
ψ_4	−13.07	−13.10



図－6. 4層3径間ラーメン.

表－2. 検算における誤差.

	A	B
S.1	−0.02	0.06
M.10	−0.03	−0.26
M.11	−0.05	−0.17
S.2	0.00	0.11
M.20	0.02	0.04
M.21	0.02	−0.04
S.3	0.01	−0.05
M.30	0.00	0.01
M.31	0.03	−0.04
S.4	0.00	−0.02
M.40	−0.02	0.00
M.41	0.00	−0.02

5. トラス

単位構は一定形状をなして配置された数本の部材と，それらの部材端の節点とから構成される．固有マトリクス $\boldsymbol{X}$ は部材力と節点変位とであらわす．単位構についての弾性条件と平衡条件とをマトリクス形式で処理して式(1)と同じ形の漸化式を得る．ここで，弾性条件を事前に処理して節点変位のみを未知量とした漸化式を仕組むこともできるが，この場合は式(11)にみられるような3つの単位構にわたる形式となる．紙面の都合上，計算例は割愛する．

6. 付　言

(i) 単位構同士の結合という思想から生まれて来た移行演算の手順は，複雑な構造体系の解析，特に有限要素法(finite element method)に有効に展開できる．

(ii) 未知量を積分常数に選んだ本法の基本式により，在来のレダクション法，変形法，応力法等の基本式が誘導され，その特性をみることができる．

(iii) 移行演算が式(11)にみられるように3つの単位構にわたる場合は，3軸マトリクスの処理方法をとるが，演算子の次数が2倍になるのを承知すれば，式(1)のような直接移行形式となしうる．