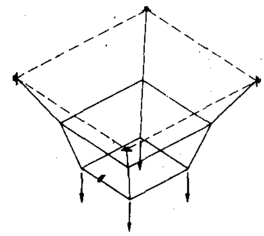
Ⅰ－66　　有限変形法による立体トラスの解法

宮地鉄工　正員　○後藤茂夫
〃　〃　今野光明
〃　〃　大西聿紀
〃　〃　大槻　護



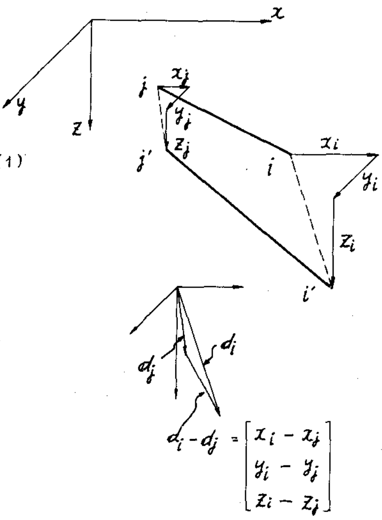
図－1

1. 要旨

変形後の骨組状態に関して釣合い方程式を導く。変形法の拡張理論としての筆者らの〃有限変形法″を立体トラスに適用したもので、変形の大きい立体吊構造などの解析、微小変形理論的には、不安定架構となるような構造（ケーブルエレクションにより架設途上の構造物など）の解析にきわめて有効であると考えられる。

2. 理論の概要

変形前に死荷重などにより $\bar{N}_{ij}$ なる軸力を生じて釣合状態にあったij部材が、活荷重により変形を生じ、軸力が $\bar{N}_{ij}+N_{ij}$ と変化した場合を考える。



図－2

軸力の増分は、その両端の節点i，jの変位ベクトルを d_i，d_j，変形前のij部材軸の方向余弦列ベクトルを α_{ij} とすれば

$$N_{ij}=F_{ij}\,\alpha_{ij}^{*}(d_i-d_j)-\varepsilon t\,l_{ij}F_{ij}+\frac{1}{2}l_{ij}F_{ij}\Delta\varphi_{ij}^{2}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

と表わすことができる。　　＊：転置記号

たゞし F_{ij}，l_{ij}，$\varepsilon t\,l_{ij}$ は、それぞれ、ij部材の伸び剛度、変形前の部材長、温度変化による自由伸び量である。

右辺才3項は非線型項であり、とくに厳密な解を要求しない場合には省略してもよい。$\Delta\varphi_{ij}$ は、ij部材の変形による角変化量と考えることができ、変位の2次までの項をとって表わせば

$$\Delta\varphi_{ij}^{2}=\frac{1}{l_{ij}^{2}}(d_i-d_j)^{*}(e-\alpha_{ij}\alpha_{ij}^{*})(d_i-d_j)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる。こゝで、e は、3次の単位行列である。

変形後におけるij部材軸の方向余弦ベクトルを $\alpha_{ij}+\Delta\alpha_{ij}$ とおけば変形後において、釣合い条件を満足しなければならない軸力の成分は、ij部材のi端において

$$\mathbb{D}_{ij}=\underbrace{(\alpha_{ij}+\Delta\alpha_{ij})(\bar{N}_{ij}+N_{ij})}_{\text{変形後の成分}}-\underbrace{\alpha_{ij}\bar{N}_{ij}}_{\text{変形前すでに釣合っていた成分}}$$

すなわち

$$\mathbb{D}_{ij}=\alpha_{ij}N_{ij}+\Delta\alpha_{ij}(\bar{N}_{ij}+N_{ij})\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

である。$\Delta\alpha_{ij}$ は、変位の2次以上の項を省略して表せば、

$$\Delta\alpha_{ij}=\frac{1}{l_{ij}}(e-\alpha_{ij}\alpha_{ij}^{*})(d_i-d_j)\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

したがって

$$\mu_{ij}=\frac{\bar{N}_{ij}+N_{ij}}{l_{ij}}\quad,\quad a_{ij}=F_{ij}\alpha_{ij}\alpha^{*}_{ij}\quad,\quad \bar{a}=\mu_{ij}(e-\alpha_{ij}\alpha^{*}_{ij})\quad,\quad S_{ij}=\tfrac{1}{2}l_{ij}F_{ij}\Delta\varphi^{2}_{ij}\alpha_{ij}$$

$$t_{ij}=\varepsilon t\, l_{ij}F_{ij}\alpha_{ij}$$

とおけば（3）は

$$D_{ij}=(a_{ij}+\bar{a}_{ij})(d_i-d_j)-t_{ij}+S_{ij} \quad\text{------------}\quad (5)$$

と表わすことができる。 i 点のまわりの力のつりあい $\sum_j D_{ij}=D_i$ （ i 点の荷重ベクトル）を全節点 i = 1, 2, ……… m に適用すれば

$$a=\begin{bmatrix}\sum_j a_{ij} & & -a_{iR}\\ & \sum_j a_{2j} \ddots & \\ -a_{Ri} & & \sum_j a_{mj}\end{bmatrix},\quad \bar{a}=\begin{bmatrix}\sum_j \bar{a}_{ij} & & -\bar{a}_{iR}\\ & \sum_j \bar{a}_{2j} \ddots & \\ -\bar{a}_{Ri} & & \sum_j \bar{a}_{mj}\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\\ \vdots\\ D_n\end{bmatrix}\quad d=\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix}\sum_j S_{ij}\\ \sum_j S_{2j}\\ \cdots\\ \sum_j S_{mj}\end{bmatrix}\qquad t=\begin{bmatrix}\sum_j t_{ij}\\ \sum_j t_{2j}\\ \cdots\\ \sum_j t_{mj}\end{bmatrix}$$

とおいて次式が得られる。

$$(a+\bar{a})\,d=D+t-S \quad\text{------------}\quad (6)$$

$a+\bar{a}$ に支点の条件を挿入すれば、正則な剛性行列となる。もちろん、そのまえに μ_{ij} を各部材毎仮定してやらねばならないが $\mu_{ij}=\bar{N}_{ij}/l_{ij}$, $S=0$ とすれば線型たわみ理論に相当する解が得られる。非線型部材方式を用いる場合、S は d の関数 すなわち $S=S\{d\}$ であり（6）のまゝでは、反復計算によらなければならないが 実際には、

$$d=(a+\bar{a})^{-1}\left(P+t-S\{(a+\bar{a})^{-1}\}\right) \quad\text{---------------}\quad (7)$$

として計算しても充分である。

従来の微小変型理論による変形法では（6）は

$$a\,d=D+t$$

となるわけであるが 図－1のような構造に対しては、a のデターミナントが0となり、不安定架構となって解は得られない。これに対し、有限変形法では 部材の最終軸力を含む項が二次剛性行列として（$\bar{a}$）加わり $|a+\bar{a}|\neq 0$ となって解を求めることができる。しかも、死荷重に対し、活荷重がある程度小さければ、$\mu_{ij}=\bar{N}_{ij}/l_{ij}$ とすることで反復計算なしで相当精度のよい解が得られる。

計算例