

1. 演算子法について.

一つの構造物は その中の一本または数本の部材によって成り立っている単位構の集合体と考えることができる。一般に曲げと受ける部材では単位構の未知量を基礎微分方程式の積分常数群に選び、それを列ベクトルに並べて固有マトリクスと名付ける。隣り合う単位構の間の結合条件を漸化式に仕組み、これにより一つの単位構から他の単位構へ固有マトリクスを移行させる。漸化式は固有マトリクスを移行させるための移行演算子 および 荷重による補給演算子から成り立っている。このようにして基準となる固有マトリクスを系全体に流通させ、それを境界条件によって決定する。

以下に本法を用いて解析したアーチの一例と述べる。

2. 基本式.

半径 R なるアーチの物理量 すなわち 接線方向の変位 u , 半径方向のたわみ w , ねわみ角 θ , 軸力 F , せん断力 S , および モーメント M は次式で与えられる:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ F \\ S \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\beta)\frac{EA}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\beta)\frac{EA}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\beta)\frac{EI}{R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \phi & \cos\phi & \sin\phi & \phi\cos\phi & \phi\sin\phi \\ 0 & 1 & -\sin\phi & \cos\phi & \beta\cos\phi - \phi\sin\phi & \beta\sin\phi + \phi\cos\phi \\ 0 & 0 & -\cos\phi & -\sin\phi & -(1+\beta)\sin\phi - \phi\cos\phi & (1+\beta)\cos\phi - \phi\sin\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \\ 0 & -\frac{1}{1+\beta} & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad (1)$$

ここに R = 半径, ϕ = 中心角, A = 断面積, E = Young 係数, I = 断面二次モーメント, $\beta = (AR^2 - I)/(AR^2 + I)$, $\mathbf{X} = \{A \ B \ C \ D \ E \ F\}$ = 固有マトリクス である。

3. 荷重項.

荷重の作用点での連続条件により荷重マトリクスが得られる。従って荷重の影響は単に固有マトリクスに荷重項を加えればよい。すなわち 全領域の固有マトリクスは $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{K}$ となる。

たとえば 半径方向の集中荷重に対しては 荷重項は次のようになる: κ を荷重点の角度とすると

$$\mathbf{K} = \frac{PR}{(1-\beta)EA} \begin{Bmatrix} 1+\beta & 0 & -(1+\beta)\cos\kappa - \kappa\sin\kappa & -(1+\beta)\sin\kappa + \kappa\cos\kappa & \sin\kappa & -\cos\kappa \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

4. 境界条件.

境界条件は次式で与えられる:

$$\text{左端: } \mathbf{B}\mathbf{X} = 0, \quad \text{右端: } \mathbf{B}'\mathbf{X}' = \mathbf{B}'(\mathbf{X} + \mathbf{K}) = 0, \quad (3)$$

ここに $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ はそれぞれ左端, 右端の境界マトリクスで両端固定の場合は次のように与えられる:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1+\beta \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & \phi \cos \phi & \sin \phi & \phi \cos \phi & \phi \sin \phi \\ 0 & 1 & -\sin \phi & \cos \phi & \beta \cos \phi - \phi \sin \phi & \beta \sin \phi + \phi \cos \phi \\ 0 & 0 & -\cos \phi & -\sin \phi & -(\beta + \phi) \sin \phi - \phi \cos \phi & (\beta + \phi) \cos \phi - \phi \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

5. 最終解.

式(3)より 固有マトリクス値は

$$X = - \begin{bmatrix} B \\ B' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} K. \quad (5)$$

この値を式(1)に代入すればアーチの物理量が得られる。

6. 計算例(固定アーチ, 図-1).

スパン長さ $\ell = 36.0 \text{ m}$, ライズ $f = 3.0 \text{ m}$, $A = 0.04 \text{ m}^2$, $E = 21,000,000 \text{ kg/m}^2$, $I = 0.005 \text{ m}^4$, $P = 1 \text{ t}$ (鉛直方向), アーチの軸線は円弧とし この計算結果を表-1に示す. 図と表の番号は物理量を求めた点である.

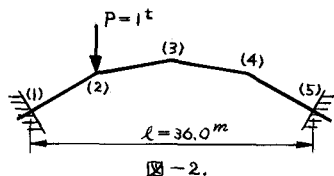
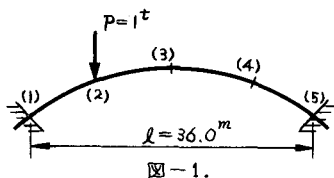


表-1.

点	$u \times 10^{-4}$	$w \times 10^{-4}$	$\theta \times 10^{-4}$	F	S	M
(1)	0	0	0	-1.352	0.846	-2.295
(2)	0.784	3.901	0.214	-1.352	0.846 -0.154	2.182
(3)	0.489	1.702	-0.493	-1.352	-0.154	-0.240
(4)	0.460	-1.225	0.036	-1.352	-0.154	-0.620
(5)	0	0	0	-1.352	-0.154	1.053

(u は水平方向の変位, w は鉛直方向の変位 とする)

表-2.

点	$w \times 10^{-4}$	M
4	3.862 (1.00)	2.001 (8.30)
8	3.892 (0.23)	2.137 (2.06)
16	3.899 (0.05)	2.171 (0.50)
32	3.901 (0.0)	2.179 (0.14)
64	3.901 (0.0)	2.182 (0.0)

() 内は 誤差 (%) を表す.

7. 近似解法.

- (1) アーチをいくつかに分割し 分割点の間の部材は直線ばりとみなす(図-2).
- (2) 分割点の結合条件により漸化式を作り 固有マトリクスを系全体に流通させ境界条件で決定する.
- (3) 分割数を多くしていくに従って この解は厳密解に近づいていくことになる.
- (4) 計算例 上の例を各4, 8, 16, 32, 64分割して計算した結果をたとえば荷重(2)のため, モーメントについて記す. この表によれば 目的に合うような精度に分割数をとることができる(表-2).

8. 総括.

本法によれば任意形状のアーチ, 変断面のアーチ等も半径, 断面積, E , I 等を変えることにより, 全く同じ式で解くことができ, また従来の方法等にみられるような静定, 不静定の概念, めんどくさな積分計算等が不要になるため 軸力, せん断力を考慮しても上のように 漸化処理によって簡単に解くことができる. 本法は一次元アーチの漸化有限要素法であると言ってよい.